

2003

COPPA FERMAT prima edizione

Genova, 2 aprile 2003

GARA DI MATEMATICA A SQUADRE PER STUDENTI DI ISTITUTI SECONDARI

in collaborazione con

DIMA, DISI e la Facoltà di Scienze M.F.N.
dell'Università degli Studi di Genova

con il patrocinio di



Università degli Studi di Genova



Provincia di Genova

Sponsor

Bollati Boringhieri 

Zanichelli Editore 

Provincia di Genova 

DueDi Premiazioni 

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera.
- Se quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
 $\sqrt{2} = 1,4142$ $\sqrt{3} = 1,7321$ $\pi = 3,142$.

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista). La scelta deve essere effettuata mediante l'apposito cartellino consegnato dai capitani al tavolo della giuria.
- **30 minuti dall'inizio:** termine ultimo per fare domande sul testo. Le domande devono essere rivolte solo dai capitani al tavolo delle domande.
- **120 minuti dall'inizio:** termine della gara.

Genova, 2 Aprile 2003
Gara a squadre – Testi



1. La bandiera comunale

15 punti

La bandiera di Genova è formata da una croce rossa su sfondo bianco. I bracci della croce sono paralleli ai lati della bandiera e la attraversano per tutta la sua lunghezza e tutta la sua larghezza.

Il Sindaco di Genova commissiona una grande bandiera che dovrà sventolare sul palazzo del Comune. Essa dovrà essere lunga tre metri e alta un metro e ottanta centimetri, mentre i bracci della croce dovranno essere larghi venti centimetri.

Determinare quanti centimetri quadrati misurerà l'area della superficie rossa su una faccia della bandiera.

2. Vittoria palindroma

15 punti

Da un giornale dell'anno 3003: "Quest'anno la consueta gara a squadre di Genova è stata vinta dal Liceo 'Rosolini'. Il capitano della squadra vincitrice ha subito fatto notare che il punteggio realizzato è il più piccolo intero di quattro cifre che sia contemporaneamente palindromo e divisibile per 9".

Determinare quanti punti ha realizzato il Liceo 'Rosolini'.

Nota: un numero si dice palindromo se non cambia leggendolo da sinistra verso destra, oppure da destra verso sinistra (come ad esempio 313 e 851158).

3. La colpa è sempre dei giornalisti

15 punti

Da un giornale del 4003: "Quest'anno la consueta gara a squadre di Genova ha visto la partecipazione di ben 9999 squadre. La classifica completa della gara è riportata nella tabella sottostante [di cui qui per brevità riportiamo solo l'inizio!]:

1	Nome squadra
2	Liceo 'Scoglio'
3	Liceo 'Boskov'
4	Istituto Spaziale 'Mancini'
5	Ginnasio Astronavale 'Skuhrazy'

Si noti in particolare che il Liceo 'Rosolini', che ha vinto per l'ultima volta esattamente 1000 anni fa, si trova quest'anno solo alla riga contrassegnata dal numero 4003".

Tuttavia, la tabella è stata compilata piuttosto in fretta e contiene due grossolani errori: il primo è che al numero 1 corrisponde l'indicazione 'Nome squadra', il secondo errore è che la classifica è stata stampata al contrario, per cui il Liceo 'Scoglio' è in realtà arrivato ultimo, il Liceo 'Boskov' è arrivato penultimo, e così via.

Determinare in quale posizione si è piazzato veramente il Liceo 'Rosolini'.

4. Il cucù impazzito **20 punti**

Nello studio del Rettore dell'Università di Genova vi è un antico orologio a cucù. Purtroppo negli ultimi tempi il meccanismo si è guastato, ed invece di annunciare le ore, l'orologio emette un "cucù!" tutte le volte che la lancetta dei secondi e quella dei minuti sono perpendicolari tra di loro (la lancetta dei secondi si muove in modo continuo e non a scatti).

Determinare quanti "cucù!" emette l'orologio nell'arco di 24 ore.

5. Ma quanto ci guadagna? **25 punti**

Un concessionario acquista un'auto usata e la rivende ad un prezzo maggiorato. I due prezzi di acquisto e rivendita sono numeri interi di euro, di quattro cifre ciascuno, per scrivere i quali si usano una ed una sola volta tutte le cifre da 1 ad 8.

Determinare quanti euro guadagna, come minimo, il concessionario.

6. Strane coincidenze all'anagrafe **25 punti**

Esaminando i dati dell'anagrafe di Genova, relativi agli anni dal 1900 al 2002, sono emerse alcune singolari coincidenze.

Innanzitutto, comunque si scelga un periodo di quattro anni consecutivi, la somma del numero dei bambini nati in quei quattro anni è sempre la stessa.

Inoltre nel 1923 sono nati 3291 bambini, e nel 1977 ne sono nati 7791.

Determinare quanti bambini sono nati nel 2001.

7. Lavorate, gente, lavorate! **30 punti**

Visto il pessimo livello della classe, un'insegnante ha riempito i suoi studenti di esercizi per le vacanze. Damiano, Giovanni e Michele hanno allora deciso di lavorare sodo nei primi giorni, in modo da avere poi l'estate libera.

Damiano ha quindi svolto il primo giorno $\frac{1}{6}$ degli esercizi, e poi il secondo giorno ne ha svolti addirittura 100. Giovanni ha invece fatto metà degli esercizi il primo giorno, ma solo 9 il secondo. Michele, infine, ha fatto il primo giorno $\frac{1}{4}$ degli esercizi assegnati, mentre il secondo giorno ne ha fatti 79.

Sapendo che nei primi due giorni Damiano ha fatto meno esercizi di Giovanni, il quale a sua volta ha fatto meno esercizi di Michele, e che tutti e tre i ragazzi hanno svolto, ogni giorno, un numero intero di esercizi, determinare quanti esercizi sono stati assegnati per le vacanze.

8. La torta della vittoria **30 punti**

Per festeggiare la vittoria della propria scuola in questa gara, gli insegnanti dell'istituto hanno deciso di offrire ai propri allievi una grande torta. Cercando di indovinare quanti grammi pesa la torta, i sette concorrenti hanno detto, rispettivamente, 5040, 5060, 5110, 5120, 5150, 5170, 5180. Nessuno ha centrato il peso esatto, e la somma di tutti gli errori (contati sempre con il segno positivo) è di 300 grammi.

Determinare quanti grammi pesa la torta.

9. Ma quanto costa pulire il “Matitone”! 35 punti

Il “Matitone” è il sesto grattacielo più alto d’Italia e si trova a Genova. Esso è formato da un prisma retto a base ottagonale sormontato da una piramide retta a base ottagonale coincidente con la base superiore del prisma.

Un’impresa di pulizie viene incaricata di pulire la superficie esterna del Matitone. Un operaio misura allora che la lunghezza di una corda tesa che parte dalla punta del grattacielo, passa per la metà di un lato dell’ottagono ed arriva fino a terra, è di 120 metri. Successivamente misura l’altezza del prisma ed il lato dell’ottagono, che risultano essere, rispettivamente, 90 metri e 20 metri.

Sapendo che l’impresa richiede mezzo euro per ogni metro quadrato da pulire, determinare quanti euro costerà la pulizia dell’intera superficie del grattacielo.

10. La regata 35 punti

Le quattro province liguri hanno deciso di sfidarsi in una regata velica. Ad un certo punto della telecronaca, la grafica computerizzata mostra dall’alto la posizione delle quattro barche. Uno spettatore, dallo spiccato spirito matematico, osserva immediatamente che la barca di Savona si trova nel punto medio tra la barca di La Spezia e quella di Imperia, e che il triangolo formato da Genova, Savona, La Spezia e quello formato da Genova, Savona e Imperia sono entrambi isosceli.

Sapendo che la distanza tra le barche di Genova e La Spezia è di 110 metri, mentre la distanza tra le barche di Genova ed Imperia è di 96 metri, determinare la distanza tra le barche di Genova e Savona.

11. Il batterio fecondo 35 punti

Nei laboratori biotecnologici dell’Università di Genova si vuole studiare un pericoloso tipo di batteri, con la particolarità che dopo un tempo fisso ogni batterio si divide in tre! Poiché all’inizio vi è un unico esemplare, un ricercatore decide di metterlo in una coltura ed aspettare che si riproduca un numero sufficiente di volte.

Dopo un certo periodo, il ricercatore riesamina la coltura e conta il numero di batteri, che però è ancora insufficiente per condurre gli studi. Passato un altro po’ di tempo, il ricercatore riconta i batteri e nota che ora ce ne sono 2106 in più rispetto al conteggio precedente.

Determinare quanti batteri ci sono nella coltura al secondo conteggio.

12. Sorvegliato speciale 40 punti

Un bambino, accompagnato dai genitori e da un nonno, vuole giocare in una piazza quadrata di 100 metri di lato. Conoscendo le sue precoci abilità matematiche, per controllarlo meglio i tre adulti si piazzano in tre vertici distinti della piazza e dicono al bambino che può scorrazzare liberamente per la piazza, purché in ogni istante il quadrilatero che ha loro quattro come vertici abbia un’area minore od uguale di un quarto dell’area della piazza.

Determinare quanti metri quadrati ha a disposizione il bambino.

13. I codici divisibili **40 punti**

Per ricordare il codice del suo VideoBank, Giovanni ha notato che si tratta di un numero di quattro cifre distinte, tutte diverse da 0 e da 1, e che è divisibile per tutte queste quattro cifre. Inoltre, si tratta del più grande numero di quattro cifre con questa proprietà. Curiosamente, il numero del VideoBank di Damiano ha la stessa proprietà di quello di Giovanni, soltanto che è il più piccolo numero di quattro cifre ad averla.

Determinare la differenza tra il codice di Giovanni e quello di Damiano.

14. Il pentagono di gara **45 punti**

In futuro si prevede di aumentare notevolmente il numero di squadre invitate a questa gara. Per questo motivo l'Università ha previsto la costruzione di un apposito palazzetto pentagonale. Il progetto prevede che due lati consecutivi siano lunghi 100 metri, e che gli altri tre lati siano lunghi 50 metri e formino tra di loro due angoli di 120 gradi.

Determinare, in metri quadrati, l'area del nuovo palazzetto.

15. Le bandiere casuali **45 punti**

Una bandiera della Sampdoria è costituita da sei strisce orizzontali colorate, dall'alto in basso, di blu, bianco, rosso, nero, bianco e blu. Una fabbrica produce bandiere della Sampdoria, ma a causa di un errore le macchine, dopo aver selezionato due strisce blu, due strisce bianche, una rossa e una nera, cuciono a caso le sei strisce di stoffa una di seguito all'altra, e poi attaccano il tutto all'asta in modo che le striscie siano orizzontali. Dopo che sono state confezionate 14400 bandiere con questo metodo, un operaio si accorge dell'errore e ferma la produzione.

Determinare quante bandiere con il giusto ordine dei colori saranno state confezionate mediamente fino a quel momento.

16. Soldi contati **50 punti**

In piazza della Vittoria vogliono costruire un piccolo parco a forma di settore circolare, circondato da una cancellata artistica in ferro battuto, sia sui due raggi, sia sull'arco.

Visto il budget ridotto, la cancellata non potrà essere più lunga di 300 metri.

Determinare, in metri quadrati, quanto potrà essere, al massimo, la superficie del parco.

17. Domeniche a piedi **50 punti**

In una domenica pomeriggio in cui nel centro di Genova è vietata la circolazione delle auto, una gran folla passeggia per via XX Settembre.

Per stimare quante persone ci sono nella via in un certo istante, Gianmarco traccia un'ideale linea retta perpendicolare alla via e conta che in un minuto questa linea viene attraversata, in un verso o nell'altro, da 150 persone.

Sapendo che via XX settembre è lunga 816 metri, e supponendo che il flusso di persone sia costante e che tutti passeggino parallelamente alla via alla velocità di un metro al secondo, determinare il numero di persone contemporaneamente presenti in via XX Settembre.

18. L'acquario **55 punti**

All'acquario di Genova ci sono 47 vasche, ciascuna con un numero diverso di pesci al suo interno. Il numero di pesci contenuti nelle varie vasche aumenta costantemente dalla vasca numero 1 alla vasca numero 47 (cioè la differenza tra il numero di pesci contenuti in una vasca e nella vasca precedente è sempre la stessa).

Sapendo che nelle vasche con il numero dispari ci sono in tutto 3336 pesci, determinare quanti pesci ci sono in totale all'acquario di Genova.

19. Fantacalcio? **55 punti**

In una rivista enigmistica ligure è comparsa la seguente espressione algebrica

$$\text{GENOA} + \text{SAMP} = \text{SERIE} - \text{A}$$

in cui lettere uguali rappresentano cifre uguali e lettere diverse rappresentano cifre diverse. Inoltre nessun numero inizia con una cifra zero.

Determinare il massimo valore che può assumere SAMP.

20. Operazione "Stadi sicuri" **60 punti**

Ad una trasferta vorrebbero partecipare 2003 tifosi. Alcuni di questi sono pacifici e dicono sempre la verità, altri purtroppo sono violenti e mentono sempre. Ogni tifoso ne conosce almeno un altro.

Tutti i 2003 tifosi hanno una home page, nella quale tutti, nei giorni che precedono la trasferta, scrivono la frase "il numero dei tifosi violenti che conosco è strettamente maggiore del numero dei tifosi pacifici che conosco".

Preoccupate dalla situazione, le autorità della città in cui dovrebbe svolgersi la partita fanno arrestare un tifoso sospetto, impedendogli di partecipare alla trasferta. A questo punto tutti i 2002 rimasti scrivono nella loro homepage "tra i tifosi rimasti, il numero dei violenti che conosco è strettamente minore del numero dei pacifici che conosco", ed i 2002 possono partire indisturbati.

Determinare quanti tifosi violenti volevano all'inizio partecipare alla trasferta.

Si assuma che la conoscenza sia simmetrica (cioè se A conosce B, allora B conosce A); si assuma inoltre che nessun tifoso includa se stesso tra le persone che conosce.

21. Il veggente **65 punti**

Per conoscere in anticipo il vincitore di questa gara a squadre, un indovino ha ordinato una sfera di cristallo di 40 centimetri di raggio. La sfera è stata trasportata in una scatola cubica di un metro di lato. Data la fragilità dell'oggetto, la sfera era tenuta ferma, all'interno della scatola, da otto sferette di gomma, uguali tra di loro e poste in corrispondenza dei vertici del cubo in modo da impedire ogni movimento della sfera di cristallo.

Determinare, in millimetri, il raggio delle sfere di gomma usate per l'imballaggio.

22. La speranza è l'ultima a morire...

65 punti

Al termine di un finalmente esaltante campionato di serie B, Genoa e Sampdoria concludono con lo stesso punteggio in testa alla classifica.

Dalle statistiche, risulta che le due squadre hanno ottenuto il loro punteggio in due modi diversi (hanno cioè totalizzato un numero diverso sia di vittorie, sia di pareggi, sia di sconfitte) ed inoltre questi erano gli unici due modi per ottenere tale punteggio.

Sapendo che i due derby sono finiti in parità e che entrambe le squadre hanno perso nella difficile trasferta di Livorno, determinare con quanti punti Genoa e Sampdoria hanno vinto il campionato.

Si assuma che il campionato si svolga ancora secondo le regole attuali, cioè con 20 squadre che si affrontano a due a due in partite di andata ritorno, in cui vengono assegnati 3 punti per la vittoria, 1 punto per il pareggio e 0 punti per la sconfitta.

23. Il crucinero

70 punti

Quest'anno Michele ha trovato, su un vecchio libro di problemi di matematica, un crucinero: si tratta di una specie di cruciverba, costituito da uno schema 4×4 con un'unica casella nera posta nella terza casella della prima riga. Le 15 caselle bianche devono essere riempite con delle cifre, in modo che i numeri che si leggono nelle varie righe e colonne non inizino mai con uno zero e rispettino le definizioni qui sotto riportate.

- *Prima riga* (prime due caselle): ha esattamente 12 divisori positivi (compresi 1 e se stesso).
- *Seconda riga*: il più piccolo intero positivo che si può scrivere come somma di due cubi perfetti positivi in due modi distinti.
- *Terza riga*: un multiplo di 13.
- *Quarta riga*: un numero primo.
- *Prima colonna*: una potenza di due.
- *Seconda colonna*: è divisibile per 102.
- *Terza colonna*: il più grande numero primo minore di 300.

Purtroppo l'ultima definizione, corrispondente alla quarta colonna, è stata rosicchiata dalle tarme, ma Michele, dopo aver risolto il resto del crucinero, si rende conto di poter scrivere sull'ultima colonna il proprio anno di nascita senza che questo sia in contraddizione con le altre definizioni.

Determinare l'anno di nascita di Michele.

24. Alberi fruttiferi

80 punti

Tutti gli alberi nel giardino di Villa Pallavicini hanno alcune strane caratteristiche. Innanzitutto sono tutti formati da 2003 rami; inoltre ogni ramo o si biforca in altri due rami, o termina con un frutto o termina con due frutti; tutti gli alberi, infine, hanno un solo tronco (da considerarsi come un ramo).

Determinare la somma del massimo e del minimo numero di frutti che può avere un albero di questo giardino.

Genova, 2 Aprile 2003

Coppa Fermat – Risposte

Num.	Problema	Punti	Risposta
1	La bandiera comunale	15	9200
2	Vittoria palindroma	15	1881
3	La colpa è sempre dei giornalisti	15	5998
4	Il cucù impazzito	20	2832
5	Ma quanto ci guadagna?	25	0247
6	Strane coincidenze all'anagrafe	25	7791
7	Lavorate, gente, lavorate!	30	0276
8	La torta della vittoria	30	5130
9	Ma quanto costa pulire il "Matitone"!	35	8400
10	La regata	35	0073
11	Il batterio fecondo	35	2187
12	Sorvegliato speciale	40	1250
13	I codici divisibili	40	7500
14	Il pentagono di gara	45	7577
15	Le bandiere casuali	45	0080
16	Soldi contati	50	5625
17	Domeniche a piedi	50	2040
18	L'acquario	55	6533
19	Fantacalcio?	55	9761
20	Operazione "Stadi sicuri"	60	2002
21	Il veggente	65	0170
22	La speranza è l'ultima a morire. . .	65	0101
23	Il crucinero	70	1977
24	Alberi fruttiferi	80	3006