Metodi Formali dell'Informatica (IV Anno), Ottobre 1998 - complessita', calcolabilita', lambda-calcolo e tipi

Esercizio di Complessita' (5 punti) Dire se vale l'inclusione stretta $NSPACE(n) \subset NSPACE(n^3)$. GIUSTIFICARE LA RISPOSTA sulla base delle relazioni di inclusione viste a lezione.

Soluzione. Vale l'inclusione stretta, infatti

- $NSPACE(n) \subseteq SPACE(n^2)$ per il teorema di Savitch
- $SPACE(n^2) \subset SPACE(n^3)$ per il teorema di gerarchia spazio
- $SPACE(n^3) \subseteq NSPACE(n^3)$ inclusione ovvia

Esercizio di Calcolabilita' (5 punti) Sia $(N, \cdot)$ la pCA di Kleene (o se si preferisce quella isomorfa $(\Sigma^*, \cdot)$ indotta da una codifica delle TM). Dire se il seguente sottoinsieme A di N e' decidibile, dove $m \in A$ sse $\exists n < m . n \cdot n = n$. GIUSTIFICARE LA RISPOSTA.

Soluzione. Il sottoinsieme A e' decidibile, poiche' e' il complementare di un insieme finito. Infatti, sia $n_0 \in N$ t.c. $n_0 \cdot n_0 = n_0$, allora tutti gli $m > n_0$ appartengono ad A. Una possibile scelta di n_0 e' un codice per la funzione identita'.

Esercizio di lambda-calcolo (5 punti)

- Dati i λ-termini $M \equiv \lambda y.x\ (\lambda z.x\ y)$ e $N = x\ y\ z$, dire quale e' *un* risultato della sostituzione $[N/x]M$ (come risposta va bene un qualsiasi termine α-convertibile).
- Dire se i seguenti termini sono $\alpha\beta$-convertibili: $M \equiv (\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x\ x\ y)$ e $N \equiv (\lambda x.x\ x\ y)\ (\lambda x.x\ x)$.

Soluzione.

- $[N/x]M \equiv \lambda a.x\ y\ z\ (\lambda b.x\ y\ z\ a)$
- Sia M che N non hanno forma normale. Esaminiamo quindi i possibili termini che si ottengono a partire da M ed N mediante β-riduzione, per vedere se e' possibile trovare un termine a cui entrambi sono riducibili.

  $M \equiv (\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x\ x\ y) \equiv (\lambda x.x\ x)\ M' \to M'\ M' \to M'\ M'\ y \to \ldots$

  $N \equiv (\lambda x.x\ x\ y)\ (\lambda x.x\ x) \equiv (\lambda x.x\ x\ y)\ N' \to N'\ N'\ y \to N'\ N'\ y \to \ldots$

  Non vi e' modo di ridurre $M'\ M'\ y$ ad $N'\ N'\ y$, poiche' il primo termine cresce ad ogni passo di riduzione, mentre il secondo si riduce solo a se stesso. Quindi M ed N non sono convertibili, perche' non sono β-riducibili ad uno stesso termine.