Domande di complessita'

Si tratta di domande di esame per il corso di TAC, che hanno un grado di difficolta' (in genere) maggiore di quello previsto per l'esame di MFI.

Ex 01/06/93 Dimostrare che $PSPACE$ e' chiuso per complementare e quantificazione limitata da un polinomio, ovvero se $L \subseteq \Sigma^*$ e' in $PSPACE$ e $p(n)$ e' un polinomio space-constructable allora anche i seguenti linguaggi sono in $PSPACE$:

- $\overline{L} = \{x \in \Sigma^* | x \notin L\}$
- $\exists_p(L) = \{x \in \Sigma^* | \exists y \in \Sigma^*.(|y| = p(|x|) \wedge \langle x, y\rangle \in L)\}$
- $\forall_p(L) = \{x \in \Sigma^* | \forall y \in \Sigma^*.(|y| = p(|x|) \supset \langle x, y\rangle \in L)\}$

dove $|x|$ e' la lunghezza della stringa x, mentre $\langle _, _\rangle : \Sigma^*, \Sigma^* \to \Sigma^*$ e' una qualche codifica delle coppie calcolabile da un traduttore T (a due nastri di input) che lavora in tempo polinomiale.

questo lo si potrebbe semplificare chiedendo solo di dimostrare la chiusura per $\forall_p$ o $\exists_p$

Ex 01/07/93 Si consideri la classe di complessita'

$$EXP = \cup_{c,d>0} DTIME(d^{(n^c)})$$

Dimostrare che se $L_1 \leq_P L_2$ e $L_2 \in EXP$ allora $L_1 \in EXP$.

Ex 28/07/93 Che cosa si puo' dire sulle relazioni di inclusione e non inclusione tra le seguenti coppie di classi di complessita':

- $DSPACE(n)$ e $DSPACE(n^2)$
- $DTIME(n^2)$ e $DTIME(T(n))$, dove

$$T(n) = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ e' dispari} \\ n^3 & \text{se } n \text{ e' pari} \end{cases}$$

- $NSPACE(n^2)$ e $NSPACE(n^5)$

Si dia per scontato che le funzioni di cui sopra (ovvero n, n^2, $T(n)$ e n^5) siano time- e space-constructable.

Ex 23/09/93 definiamo una nuova misura di complessita' tempo per le NDTM (macchine di Turing non-deterministica) ed una classe di complessita' ANP ad essa correlata:

- M e' **accept time-bounded** da $T(n)$ sse per ogni $w \in \Sigma^*$ tutte le computazioni di M che accettano w terminano in al piu' $T(|w|)$
- $L \in ANP$ sse esiste una NDTM M ed un polinomio $T(n)$ t.c. $L = L_M$ e M e' accept time-bounded da $T(n)$.

Dimostrare che $ANP = NP$.

Ex 25/10/93 Si ricorda che Con e' il linguaggio i cui elementi codificano/sono terne (G, s, t) dove $G = (V, E)$ e' un grafo diretto e $s, t \in V$ t.c. esiste un cammino da s a t in G.

Sia $3.Con$ il linguaggio i cui elementi codificano/sono quadruple (G, s, u, t) dove $G = (V, E)$ e' un grafo diretto e $s, u, t \in V$ t.c. esiste un cammino da s a u ed uno da u a t.

Si dia una riduzione log-space di $3.Con$ a Con.

22/12/93 Dimostrare che la relazione di riducibilita' $\leq_L$ e' transitiva.

22/12/93 Al contrario della transitivita' di $\leq_P$ in cui i traduttori venivano composti in modo sequenziale, occorre adottare un approccio demand-driven, cioe' quando il secondo traduttore T_2 ha bisogno di leggere il carattere in posizioni i dell'output del primo traduttore T_1 lo richiede, e questo viene ricalcolato. In questo modo lo spazio di lavoro usato rimane logaritmico.

Ex 23/02/94 Dimostrare che $NLOG$ e' propriamente contenuto in $PSPACE$.

Ex 08/06/94 Sia $Log^2 = DSpace((log\ n)^2)$. In che relazione sta Log^2 rispetto a Log, $NLog$ e $PSpace$? Dire se Log^2 e' chiuso rispetto a $\leq_L$ (cioe' $L \leq_L L' \in Log^2$ implica $L \in Log^2$).

Ex 08/06/94 $NLog \subseteq Log^2 \subset PSpace$ per i teoremi di Savitch e Gerarchia Spazio. Log^2 e' chiuso rispetto a $\leq_L$ (si usi $\leq_L \subseteq \leq_P$, un po' di maggiorazioni ed il lemma di compressione).

Ex 20/07/94 Sia $IndSet$ il linguaggio che codifica le coppie $\langle G, k \rangle$, dove G e' un grafo e k un numero naturale, tale che esiste un insieme **indipendente** U di nodi di G con $|U| = k$. Si dice che U e' indipendente se $\forall n, n' \in U.(n, n') \notin G$. [si dia una riduzione di $Clique$ ad $IndSet$].

Ex 20/07/94 La riduzione si trova sulle note (ma non e' stata menzionata esplicitamente a lezione) ed e' data da $\langle (V, E), k \rangle \mapsto \langle (V, \bar{E}), k \rangle$.

Ex 28/09/94 Sia $L \in NTIME'(f)$ sse esiste una NDTM M tale che $L = L(M)$ e $\forall w \in L$ esiste una computazione di M con input w accettante e con un numero di passi $\leq f(|w|)$. E' facile vedere che $NTime(f) \subseteq NTime'(f)$, perche'? Sotto quale ipotesi su f si ha che $NTime(f) = NTime'(f)$? Dare la dimostrazione.

Ex 28/09/94 Occorre assume che f sia time-constructable. Inoltre si deve poter applicare il teorema di speed-up.

Ex 27/10/94 Dato un linguaggio $L \subseteq \Sigma^*$ si consideri il linguaggio L^* chiusura transitiva e riflessiva di L, cioe' $w \in L^*$ sse

> esiste $n \geq 0$, ed esistono $w_i \in L$ per $1 \leq i \leq n$ tali che $w = w_1 w_2 \ldots w_n$
> (senza perdita di generalita' si puo' assumere che le w_i non siano vuote).

Dimostrare che se $L \in NP$ allora $L^* \in NP$.