III GARA DEL PUBBLICO

Cesenatico, 4 maggio 2002

1. **La piscina del professor Abacus** **25 punti**

   Nel giardino della villa del Professor Abacus c'è una piscina circolare circondata da quattro vialetti rettilinei che formano un quadrilatero. La piscina tocca ciascuno dei quattro vialetti e inoltre due vialetti opposti sono paralleli, mentre gli altri due hanno la stessa lunghezza. Sapendo che i due paralleli misurano rispettivamente 800 e 200 centimetri, quanti centimetri misura il raggio della piscina?

2. **Nipotini giocherelloni** **40 punti**

   I tre nipoti del Professor Abacus (Anna, Bernardo e Carla) giocano al seguente gioco: in un'urna ci sono tre fogliettini con su scritto i tre nomi dei bambini. Si estrae un fogliettino, si annota quale nome è stato estratto e si rimette il fogliettino nell'urna, ripetendo l'operazione finché un nome non viene estratto due volte. A questo punto il giocatore in questione viene eliminato e proseguono gli altri due mettendo solo due foglietti nell'urna. Quando il nome di uno dei due rimasti è stato estratto due volte contando anche le estrazioni già effettuate prima viene proclamato vincitore l'altro. Qual è la probabilità che il gioco termini esattamente dopo 4 estrazioni? (Calcolate la probabilità in percentuale e riportate la parte intera del risultato)

3. **Anna scolara distratta** **55 punti**

   Durante una noiosa ora di lezione Anna fa il seguente gioco. Scrive su un foglio un intero a_0, poi scrive una successione di interi a_i ogni volta prendendo come a_{i+1} o la somma delle cifre del numero precedente o il loro prodotto. Dopo un po' si accorge che tutti i numeri che ha scritto sono dispari. Quanti sono i numeri a_0 con meno di sei cifre per cui in qualsiasi momento Anna si fermi e comunque decida di calcolare a_{i+1} secondo le regole di sopra troverà sempre e solo numeri dispari?

4. **I compiti di Bernardo** **50 punti**

   Il prof. di matematica ha dato a Bernardo il seguente compito a casa:
   Calcolare il minimo assoluto dell'espressione

   $$\left|1001 + 1000x + 999x^2 + \ldots + 2x^{999} + x^{1000}\right|.$$

   per x reale.
   Bernardo non ce la fa ma suo nonno non lo può aiutare perché si trova a Pechino al Congresso dei Matematici... Sapreste dargli una mano?

5. **Convegni di matematici** **30 punti**

   Il Professor Abacus fa parte di un'antichissima società di matematici fondata nell'anno 232. I membri della società chiamano

   (a) "accomodante" ogni numero tale che aggiungendogli 1 il risultato sia divisibile per 2, aggiungendogli 2 sia divisibile per 3, aggiungendogli 3 sia divisibile per 4;

   (b) "ribelle" ogni numero tale che togliendogli 1 il risultato sia divisibile per 2, togliendogli 2 sia divisibile per 3, togliendogli 3 sia divisibile per 4.

   I membri della Società organizzano un convegno in tutti gli anni accomodanti e in tutti gli anni ribelli. Sapendo che il professor Abacus ha oggi 75 anni e si è iscritto all'associazione quando ne aveva 60 calcolate la somma degli anni dei convegni a cui ha partecipato.

6. **Una strana stazione orbitante** **45 punti**

Il figlio del Professor Abacus è un ingegnere aerospaziale. In questi giorni sta progettando un pezzo di una stazione orbitante: l'intelaiatura del pezzo è un parallelepipedo formato da due cubetti che hanno una faccia in comune. Sulla rappresentazione tridimensionale che il suo computer dà del parallelepipedo in un riferimento cartesiano tre vertici di esso hanno coordinate $(3, 6, 2), (5, 2, 6), (7, 7, 1)$. Quanto misura in m^2 la superficie totale del pezzo sapendo che sugli assi ciascuna unità rappresenta un metro?

7. **Strani incontri sul tram** **40 punti**

Il professor Abacus e un suo collega entrano in un tram in cui ci sono 6 persone. Il professor Abacus nota che, tra i passeggeri già presenti, ci sono esattamente 2 persone con i capelli biondi e il suo collega nota che, tra i passeggeri già presenti, ci sono esattamente 2 persone che indossano una giacca blu. Qual è la probabilità che ci sia almeno un biondo che indossi una giacca blu? (Calcolare la probabilità in percentuale supponendo che i due eventi "avere capelli biondi" e "indossare una giacca blu" siano indipendenti, e riportare la parte intera del risultato)

8. **I salti delle rane** **20 punti**

Nel giardino della casa del professor Abacus ci sono due rane. In questo momento esse si trovano in uno dei vialetti attorno alla piscina e stanno cercando di raggiungere una pozza d'acqua. La rana A si trova a 40 centimetri dalla pozza, mentre la B si trova dietro la A a un metro dalla pozza. La B ad ogni salto copre la metà della distanza che c'è in quel momento tra lei e la pozza d'acqua. La A al primo salto copre la metà della distanza, al secondo copre un terzo, al terzo copre un quarto e così via. Dopo quanti salti B supera A, sapendo che le rane saltano sempre contemporaneamente?

9. **La roulette di casa Abacus** **50 punti**

Nella casa del professor Abacus c'è una strana roulette. In questa roulette ci sono in circolo 56 caselle, su ciascuna delle quali è scritto un numero. Comunque si prendano 20 caselle consecutive la somma di numeri scritti in esse è sempre uguale a 500. C'è inoltre una casella in cui appare il numero 1 e se numeriamo le altre in senso orario a partire da essa, nella 19–esima appare il numero 19 e nella 50–esima il numero 50. Quale numero è scritto nella 56–esima casella?

10. **Anna viene punita!** **55 punti**

Anna è stata scoperta dal professore mentre durante la lezione invece di seguire faceva il suo strano gioco. Pertanto per punizione le viene assegnato di calcolare quanto fa la metà di 1000 più i due quarti di 1000, più i 3/8 di 1000, più i 4/16 di 1000 e così via andando avanti fino a fermarsi a $20/2^{20}$–esimi di 1000. Ma il professore si accorge dopo qualche minuto che i calcoli sono troppi e la punizione è troppo pesante. Pertanto dice ad Anna: "Ti risparmierò tutti questi calcoli se saprai dirmi qual è il massimo numero intero che puoi superare continuando a sommare $n/2^n$–esimi di 1000". Sapreste darle un valido suggerimento?

11. **I sassolini di Carla** **40 punti**

Nel giardino della villa del Professor Abacus, Carla sta giocando con dei sassolini. In questo momento ne ha n mucchietti, formati da $1, 2, 3, \ldots, n$ sassolini. Carla si accorge che può raggruppare un po' di mucchetti da una parte e un po' da un'altra in modo tale che il numero dei sassolini che si trovano da una delle due parti è uguale al numero di sassolini che si trovano dall'altra parte; inoltre, se sposta un certo mucchietto da una parte all'altra, quella con più sassolini ne ha esattamente il doppio dell'altra. Carla, che pur essendo piccola è già molto brava in matematica, si accorge che se avesse m mucchietti fatti come sopra ma con $m > n$ la cosa non si sarebbe potuta verificare. Quanto vale n?

12. **Il triangolo di Bernardo** **30 punti**

Sul suo quaderno quadrettato Bernardo sta per disegnare un triangolo di coordinate $(0, 0)$, $(1, n)$ e $(n, 1)$. Qual è il più piccolo n che deve scegliere perché ci siano almeno 1000 punti a coordinate intere *interni* al triangolo?

13. **La piazza ottagonale** **45 punti**

La piazza che si trova davanti alla casa del professor Abacus è un ottagono regolare $ABCDEFGH$. Sapendo che la distanza tra il centro della piazza e uno qualsiasi dei vertici è 10 metri calcolate le prime quattro cifre del prodotto delle misure (in metri) dei segmenti che congiungono A con tutti gli altri vertici.

14. **Le biglie di Carla** **60 punti**

Questa volta Carla sta giocando con un po' di biglie colorate. Le ha appena divise in un certo numero di mucchi, che chiameremo A_i, tutti contenenti almeno due biglie. Il nonno la osserva bonariamente mentre legge il giornale, fissa il mucchietto A_i e distrattamente calcola il numero c_i di tutte le coppie di biglie che appartengono entrambe ad A_i. Si accorge poi che la somma di tutti i c_i fa 28 e che la stessa cosa succede considerando le terne. Sapreste dire quante sono le biglie di Carla?

15. **La gara del pubblico di Matelandia** **30 punti**

Il Professor Abacus organizza ogni anno la gara del pubblico di Matelandia. Quest'anno ci sono 25 quesiti e una singola squadra del pubblico può totalizzare in ciascun quesito o 3 o 1 o 0 punti. Qual è il numero minimo di squadre del pubblico che devono partecipare perché ce ne siano necessariamente due a pari merito?

16. **Col fiato sul collo...** **40 punti**

Come già sapete il Professor Abacus organizza ogni anno la gara del pubblico di Matelandia. Come al solito, anche quest'anno è in pesante ritardo: deve ancora inserire tre problemi per completare la gara. Pertanto, disperato, comincia a cercare in rete dei problemi che possa opportunamente modificare per la gara. Il Professor Abacus stesso ha stimato che per ogni problema che guarda ha 1/2 di probabilità che sia adatto per la gara del pubblico. Gli rimane ancora un'ora: supponendo che ci metta quindici minuti a esaminare un problema, che probabilità ha di farcela a completare il testo della gara in tempo? (Calcolare la probabilità in percentuale assumendo che la probabilità che un certo problema vada bene sia indipendente dalla bontà dei problemi precedenti, e dare nella risposta la parte intera del risultato)

17. **Il giardino triangolare** **70 punti**

La finestra dello studio del Professor Abacus dà su un giardino a forma di triangolo isoscele ABC il cui angolo al vertice A misura 20 gradi. Il giardino è attraversato da tre vialetti: uno congiunge un punto D di AB con il vertice C, l'altro congiunge un punto E di AC con B e il terzo congiunge D con E. Sapendo che $E\widehat{B}A$ e $D\widehat{C}A$ misurano rispettivamente 20 e 30 gradi si determini l'ampiezza di $E\widehat{D}B$.

18. **Il professor Abacus in tram** **15 punti**

Il professor Abacus in genere prende il tram 32 per andare a lavorare all'Università. Tuttavia stamattina è in ritardo e si trova costretto a prendere il tram 28. "Buffo" – pensa Abacus – "il più piccolo quadrato perfetto che è multiplo di 28 dà il numero civico di casa mia." Qual è il numero civico dell'edificio in cui abita il professore?

19. **Stemmi molto geometrici** **70 punti**

Lo stemma dell'università di Matelandia è costituito di 2 cerchi tangenti internamente in un punto P. Un monello si è divertito a tracciare sullo stemma della porta del rettorato una corda AB del cerchio più grande tangente nel punto C al cerchio più piccolo ed a tracciare le due linee che congiungono A e B con P. Chiamiamo D ed E le intersezioni, rispettivamente, di AP e BP col cerchio più piccolo. Sapendo che $AB = 84$, $PD = 11$ e $PE = 10$ calcolare AC.

20. **Abacus scultore** **65 punti**

Il Professor Abacus nel tempo libero si diletta nella scultura astratta. Da un cubo di legno di lato 10 centimetri ricava una scultura che è data dall'unione di due tetraedri. Il primo ha come vertici due vertici del cubo che stanno su una diagonale d di una faccia e due vertici che stanno sulla diagonale d' della faccia opposta che non è parallela a d. I vertici del secondo tetraedro sono i rimanenti quattro vertici del cubo. Qual è il volume della scultura in cm^3?

21. **I misteri della democrazia** **50 punti**

Il Professor Abacus si è candidato per diventare presidente della Società dei Matematici. La commissione che elegge il presidente è composta di nove persone e sceglie tra i tre candidati presidenti nel seguente modo: ogni elettore scrive il nome dei tre candidati in ordine di preferenza assegnando 3 punti al primo, 2 al secondo e 1 al terzo. Successivamente si sommano i punti ottenuti da ogni candidato e si stila la graduatoria finale. Alla fine delle elezioni ogni candidato ha ricevuto un punteggio diverso e purtroppo il professor Abacus è arrivato terzo. Come se non bastasse osserva mestamente che se l'elezione fosse avvenuta al solito modo (cioè se ogni elettore avesse assegnato un solo punto al candidato preferito) la graduatoria sarebbe stata esattamente il contrario! Scrivete il punteggio ottenuto dal professor Abacus.

22. **La cassaforte di Abacus** **45 punti**

Il professor Abacus tiene i propri soldi in una cassaforte con una combinazione di 3 cifre. Sfortunatamente non si ricorda più la combinazione, ma ricorda che:

- non ci sono zeri;
- c'erano un 6 e un 8 da qualche parte;
- la differenza tra due numeri consecutivi non è mai divisibile per 3.

Quante combinazioni restano da provare al professore?

23. **Il triangolo di Anna** **55 punti**

Anna ha appena disegnato un triangolo usando il suo righello e ha fatto in modo che ciascun lato fosse un numero dispari di centimetri. Quanti triangoli del genere può disegnare se si considera che il suo righello non permette di misurare più di 15 centimetri? (NB: Due triangoli vengono considerati diversi solo se non sono congruenti)

24. **Bernardo e il meccano** **20 punti**

Bernardo sta giocando col meccano. Prima costruisce due cubi di lati che, in centimetri misurano a e b. Poi smonta di nuovo i cubi e mettendo insieme i vari lati dei cubi precedenti costruisce un cubo più grande, di lato $c = a + b$. Il volume del nuovo cubo eccede di 3000 cm^3 la somma dei volumi degli altri 2. Infine Bernardo smonta di nuovo ciò che ha costruito e monta un parallelepipedo rettangolo i cui lati misurano a, b e c. Quanto misura (in cm^3) il volume del parallelepipedo?

25. **Carla e i trenini** **35 punti**

Carla è una grande appassionata di trenini elettrici. In questo momento sta maneggiando 5 binari di lunghezza diversa. Prendendo tutte le possibili coppie di binari e sommando le lunghezze degli elementi di ciascuna coppia si ottengono i numeri $41, 44, 45, 48, 49, 50, 51, 52, 54$ e 58. Qual è la lunghezza del binario più corto?

Istruzioni generali

Si ricorda che in tutti i problemi occorre indicare come risposta un numero intero, compreso tra 0000 e 9999. Qualora la quantità richiesta non dovesse risultare un numero intero, si indichi la sua parte intera. Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$\sqrt{2} = 1,4142$ $\sqrt{3} = 1,7320$ $\sqrt{5} = 2,2361$ $\pi = 3,1416$.