

Parma, 22 Aprile 2002

Coppa Hilbert – Testi

1. Il pendolare meticoloso

15 punti

Uno studente pendolare ha percorso 10.000 km con la sua auto, avendo cura di alternare le ruote (compresa quella di scorta) in modo che tutte le gomme percorressero lo stesso chilometraggio.

Determinare quanti km ha percorso ciascuna gomma.

2. I tre neonati

15 punti

Nel reparto di neonatologia della Clinica Universitaria di Parma sono appena nati tre bambini: Alberto, Alessandra ed Alessandro. I medici vorrebbero sapere il loro peso, ma purtroppo per un malfunzionamento la bilancia elettronica del reparto non mostra pesi inferiori ai 5 Kg. Decidono allora di pesare i bambini a due a due, ottenendo i seguenti risultati:

- Alberto più Alessandra: 7041 grammi;
- Alessandra più Alessandro: 6159 grammi;
- Alessandro più Alberto: 7372 grammi.

Determinare il peso di Alberto (in grammi).

3. Sempre più in alto!

20 punti

In deroga a tutte le normative urbanistiche, il comune di Parma ha autorizzato la costruzione di una nuova sede del Dipartimento di Matematica, che sarà ospitato in un avveniristico grattacielo a base quadrata, alto 50 metri.

Sapendo che la superficie fuori terra del grattacielo (quattro facciate più il terrazzo superiore) sarà di 2321 metri quadri, determinare quale sarà (in metri cubi) il suo volume.

4. Ma che fatica laurearsi!

25 punti

Per laurearsi in matematica con voto finale 66, uno studente ha svolto, in ogni anno della sua carriera universitaria, soltanto 51 esercizi. Un suo amico, che ha avuto voto finale 67, ha svolto ogni anno gli esercizi precedenti, più altri 53. Un terzo studente, che ha avuto voto finale 68, ha svolto, oltre a quelli necessari per il 67, altri 55 esercizi all'anno.

Da questa verifica empirica, pare assodato che il numero di esercizi annui in più, necessari per guadagnare un punto alla laurea, cresca di due in due, man mano che cresce il punteggio a cui si aspira.

Determinare, secondo questa regola, quanti esercizi dovrà fare ogni anno chi punta al 110.

5. Il segreto del successo

25 punti

Secondo una recente statistica, tra i laureati in matematica a Parma, nessuno è diventato miliardario (nemmeno nel senso delle vecchie lire!), ma solo 1 su 14 non ha trovato un posto di lavoro entro due mesi dalla laurea. Detto p il numero, compreso tra 0 e 100, che indica la percentuale di laureati occupati dopo due mesi, determinare la sua cifra delle decine, la sua cifra delle unità, la sua 2002-esima cifra dopo la virgola, la sua miliardesima cifra dopo la virgola.

Nella risposta indicare di seguito le quattro cifre richieste.

6. Riciclaggio **25 punti**

Per l'anno 2002 Filippo ha ricevuto in regalo due agende. Poiché a lui ne serve una sola, ha deciso di conservare l'altra in modo da poterla riutilizzare fra qualche anno, non appena l'agenda tornerà ad indicare in ogni giorno dell'anno il giorno della settimana giusto.

Determinare il primo anno in cui Filippo potrà usare l'agenda avanzata.

7. La manifestazione **25 punti**

Per protestare contro i ritardi dei docenti a lezione, sono scesi in piazza tutti i 2002 studenti di matematica dell'Università di Parma. Di questi, alcuni (i teorici) si occupano di matematica pura e, vivendo in un mondo ideale, dicono sempre la verità. I rimanenti (gli applicati) si occupano di matematica applicata e, per adattarsi meglio al mondo reale, mentono sempre. Tutti i teorici si conoscono tra di loro, così come pure tutti gli applicati si conoscono tra di loro.

Tutti i 2002 manifestanti hanno scritto nella loro homepage "il numero dei manifestanti applicati che conosco è strettamente maggiore del numero dei manifestanti teorici che conosco".

Determinare quanti manifestanti sono teorici.

Si assuma che la conoscenza sia simmetrica (cioè se A conosce B , allora B conosce A); si assuma inoltre che ogni manifestante non includa se stesso tra le persone che conosce.

8. Il triangolo geometrico **30 punti**

In un'aula del Dipartimento di Matematica, un murale illustra il Teorema di Pitagora. Per aumentare il significato simbolico, le lunghezze dei lati del triangolo rettangolo raffigurato sono state scelte in progressione geometrica.

Sapendo che il quadrato costruito sul cateto minore ha area 1000 cm^2 , determinare (in cm^2) l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa.

9. La nazionale **30 punti**

Al bar dell'Università alcuni studenti stanno commentando le ultime indiscrezioni sulla nazionale che parteciperà ai prossimi Mondiali di Calcio in Corea e Giappone. Pare che il CT Trapattoni intenda convocare 3 portieri, 8 difensori, 7 centrocampisti e 5 attaccanti.

Supponendo che giochi sempre con 1 portiere, 3 difensori, 5 centrocampisti e 2 attaccanti, e che inoltre Nesta (difensore) e Vieri (attaccante) vengano sempre schierati, determinare quante formazioni diverse può mettere in campo Trapattoni.

10. L'andamento delle iscrizioni **30 punti**

Da un'antica cronaca dell'Università di Parma: "Due anni fa il numero degli iscritti era un quadrato perfetto. L'anno scorso, il numero degli iscritti è cresciuto di 100 unità, diventando un quadrato perfetto aumentato di uno. Quest'anno è cresciuto ancora di 100 unità, diventando nuovamente un quadrato perfetto."

Determinare il numero degli studenti iscritti nell'anno a cui risale la cronaca.

11. A tavola non si invecchia **35 punti**

Oggi la lezione di Analisi Matematica è terminata regolarmente alle 12:00. Davide ha allora deciso di recarsi presto alla mensa universitaria, in modo da non trovare molta fila. Nel momento in cui si è seduto al tavolo, Davide ha notato che la lancetta delle ore e quella dei minuti dell'orologio della mensa erano perpendicolari tra di loro. Terminato il pasto, Davide si è alzato dal tavolo, e in

quell'istante ha notato che le due lancette erano nuovamente perpendicolari. Alle 13:00, Davide ha raccontato questa strana coincidenza agli amici incontrati al bar.

Determinare per quanti secondi Davide è rimasto al tavolo della mensa.

12. Corsi affollati? 35 punti

Quest'anno p studenti seguono il corso di Analisi Superiore, q studenti seguono il corso di Topologia Algebrica ed r studenti seguono il corso di Teoria dei Numeri.

Sapendo che p, q, r sono numeri primi tali che $rq + p^2 = 676$, determinare il prodotto pqr .

13. Il crollo in borsa 40 punti

L'Università di Parma è stata quotata in borsa. In un venerdì nero, le sue azioni hanno aperto (alle 9:00) ad un prezzo fantascientifico: una azione valeva infatti un numero di euro pari al fattoriale di 2002. Purtroppo il prezzo si è andato deteriorando ad un ritmo vertiginoso: infatti, in ogni minuto, il prezzo diventava un numero di euro pari alla somma delle cifre del prezzo nel minuto precedente.

Determinare il prezzo di una azione in chiusura della giornata, cioè alle 18:00.

14. La stella 40 punti

L'aula storica dell'Università di Parma ha una stupenda vetrata circolare, decorata con una stella a 49 punte, in rappresentanza dei 49 corsi di laurea attivati. La stella può essere descritta con la seguente costruzione: presi nell'ordine i punti P_1, P_2, \dots, P_{49} sulla circonferenza della vetrata, non necessariamente equispaziati, la stella si ottiene unendo P_1 con P_3 , P_3 con P_5 , P_5 con P_7 , e così via, fino a ritornare in P_1 (si intende che in questo modo il punto P_{49} sarà unito con P_{47} e P_2).

Determinare (in gradi sessagesimali) il minimo valore che può avere la somma degli angoli della stella con vertici in P_1, P_2, \dots, P_{49} .

15. Forza Giallo Blu! 40 punti

All'ingresso del Tardini, su un muro bianco sono disposti due quadrati di 1 metro di lato, uno fatto di vetro giallo, uno di vetro blu (i colori della squadra di calcio di Parma). I due quadrati sono incernierati in modo da avere il centro coincidente, ma possono essere ruotati a piacere.

Determinare (in cm^2) il minimo valore possibile per l'area della zona che risulta di colore verde.

16. Il codice PIN 45 punti

Per ricordare il PIN del suo telefono cellulare, uno studente di matematica ha osservato che è uguale al numero degli interi positivi di 11 cifre che sono multipli di 2002 e la cui scrittura in base 10 termina con le cifre 2002.

Determinare tale PIN.

17. Il codice PUK 45 punti

Lo stesso studente del problema precedente ha notato che il PUK della sua SIM card è un codice di nove cifre in cui le nove cifre 1, 2, \dots , 9 compaiono una ed una sola volta.

Determinare il massimo valore che può assumere la somma dei sette numeri di tre cifre che si ottengono considerando tutti i blocchi di tre cifre consecutive del PUK.

18. Lo scarso peso della fisica 50 punti

A causa di un drastico taglio dei finanziamenti, il laboratorio di fisica dispone solo di una bilancia a due piatti e di 6 pesi da, rispettivamente, 1, 3, 9, 27, 81, 243 grammi. Ciascun peso, se utilizzato, può essere indifferentemente piazzato sull'uno o sull'altro piatto della bilancia.

Determinare quanti oggetti di peso diverso possono essere pesati con questa apparecchiatura.

19. **Gli esagoni nascosti** **50 punti**

Alla base della torretta della sede centrale dell'Università di Parma c'è una stanza a forma di esagono regolare di 3 metri di lato, pavimentata usando piastrelle a forma di triangolo equilatero di lato 1 metro.

Determinare quanti sono gli esagoni regolari i cui vertici sono vertici di qualche piastrella.

20. **L'addizione letterale** **55 punti**

Per la rubrica enigmistica del giornalino universitario di Parma, gli studenti di matematica hanno proposto la seguente addizione cifrata

$$\text{TRE} + \text{TRE} + \text{DUE} = \text{OTTO},$$

in cui lettere uguali rappresentano cifre uguali, lettere diverse rappresentano cifre diverse, e nessuna scrittura decimale inizia con una cifra zero.

Determinare la somma del massimo e del minimo valore che può assumere OTTO.

21. **Hai voluto la bici: pedala!** **55 punti**

Per affrontare il "Giro della provincia di Parma", classica di primavera organizzata dal CUS, Francesco usa una bicicletta da corsa che monta anteriormente tre corone con 53, 39, 30 denti, rispettivamente, e posteriormente sette ruote dentate con 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23 denti, rispettivamente.

Supponendo di aver scritto tutti i rapporti possibili in ordine di lunghezza, dal più lungo (53/11) al più corto (30/23), determinare quello che viene a trovarsi in posizione centrale.

Nella risposta si usino le prime due cifre per indicare i denti della corona anteriore e le ultime due cifre per quella posteriore.

22. **Il nuovo campus** **60 punti**

Per fronteggiare il vertiginoso aumento delle iscrizioni, l'Università di Parma sta costruendo un nuovo campus, in un'area quadrata con lato di 1000 metri. Essendo i lavori ancora agli inizi, per ora vi sono solo tre stradine rettilinee. Dall'ingresso principale, posto in un vertice, parte una strada che arriva fino al Dipartimento di Matematica, il cui ingresso si trova nel punto medio di uno dei due lati opposti rispetto all'ingresso principale. Dal Dipartimento di Matematica parte un'altra stradina che arriva fino alla porta della mensa, posta in un punto dell'altro lato opposto rispetto all'ingresso principale. Dalla mensa parte infine una terza strada che ritorna all'ingresso principale.

Determinare (in metri) il minimo valore che può avere la somma delle lunghezze delle tre strade.

23. **Ma quanto è difficile copiare** **60 punti**

Davide, Filippo e Francesco devono sostenere lo scritto dell'esame di Probabilità. Quando arrivano nell'aula si piazzano strategicamente in modo da potersi aiutare. Sfortunatamente per loro, il docente ritiene che l'aula sia troppo affollata e dunque, visto che gli studenti sono in numero pari, decide di dividerli per sorteggio in due gruppi uguali, che sosterranno lo scritto in aule diverse.

Francesco, il più preparato dei tre, osserva immediatamente che la probabilità di ritrovarsi nella stessa aula con Filippo e Davide è esattamente un quinto.

Determinare quanti studenti si sono presentati alla prova scritta.

24. Il biliardo acuminato

70 punti

Alcuni studenti di matematica di Parma hanno realizzato un videogioco in cui è stato simulato un biliardo a forma di triangolo isoscele il cui angolo al vertice ha ampiezza di soltanto due primi (un trentesimo di grado!). Una pallina viene lanciata da un estremo della base.

Determinare il massimo numero di rimbalzi che la pallina può fare contro le sponde laterali prima di sbattere nuovamente sulla base.

Trattandosi di una versione preliminare, la pallina è stata approssimata con un punto.

25. Il giardino delle parabole

80 punti

Gli studenti di matematica di Parma sono soliti ricrearsi nel giardino annesso alle aule. Tale giardino si estende su un quadrato di 100 metri di lato, orientato secondo i punti cardinali, ed è percorso da due sentieri che seguono un andamento parabolico: il primo passa per i due estremi del lato Nord ed ha il vertice nel punto medio del lato Sud, il secondo passa per i due estremi del lato Est ed ha il vertice nel punto medio del lato Ovest.

Determinare quanti metri quadri misura l'area del quadrilatero che ha come vertici i quattro punti d'incontro dei due sentieri.

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera.
- Se quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1,4142$$

$$\sqrt{5} = 2,2361$$

$$\sqrt{13} = 3,605.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista). La scelta deve essere effettuata mediante l'apposito cartellino consegnato dai capitani al tavolo della giuria.
- **30 minuti dall'inizio:** termine ultimo per fare domande sul testo. Le domande devono essere rivolte solo dai capitani al tavolo della giuria.
- **120 minuti dall'inizio:** termine della gara.

La prossima pagina presenta le risposte ai problemi.

Parma, 22 Aprile 2002

Coppa Hilbert – Risposte

Num.	Problema	Punti	Risposta
1	Il pendolare meticoloso	15	8000
2	I tre neonati	15	4127
3	Sempre più in alto!	20	6050
4	Ma che fatica laurearsi!	25	4275
5	Il segreto del successo	25	9211
6	Riciclaggio	25	2013
7	La manifestazione	25	1001
8	Il triangolo geometrico	30	2618
9	La nazionale	30	5292
10	L'andamento delle iscrizioni	30	2601
11	A tavola non si invecchia	35	1963
12	Corsi affollati?	35	2001
13	Il crollo in borsa	40	0009
14	La stella	40	8100
15	Forza Giallo Blu!	40	8284
16	Il codice PIN	45	8991
17	Il codice PUK	45	4648
18	Lo scarso peso della fisica	50	0364
19	Gli esagoni nascosti	50	0036
20	L'addizione letterale	55	3102
21	Hai voluto la bici: pedala!	55	3013
22	Il nuovo campus	60	2920
23	Ma quanto è difficile copiare	60	0016
24	Il biliardo acuminato	70	5399
25	Il giardino delle parabole	80	4192