

Elementi introduttivi di Logica Matematica

G. Rosolini

Conseguenza logica

La conseguenza logica tra formule è determinata in modo compatto da alcune proprietà che diamo qui sotto. Vedremo la definizione astratta in seguito.

Per indicare quando la formula F_2 è **conseguenza logica** della formula F_1 scriviamo

$$F_1 \models F_2$$

Si legge $F_1 \models F_2$ come “da F_1 segue logicamente F_2 ”. Se si usa notazione abbreviata in un testo scritto, è opportuno indicare una tale conseguenza con il segno \therefore al posto del quale, troppo spesso, viene usato erroneamente il segno \Rightarrow .

Proprietà Nel seguito A , B e C indicano generiche formule ben formate.

riflessiva $A \models A$

transitiva se $A \models B$ e $B \models C$, allora $A \models C$

passante se $A(x) \models B(x)$, allora $A(t) \models B(t)$

I connettivi come aggiunti

$\&$ (coniunzione):	$C \models A \& B$	se e solo se	$C \models A$ e $C \models B$
$ $ (disgiunzione):	$A B \models C$	se e solo se	$A \models C$ e $B \models C$
$!$ (quantificatore universale):	$C \models !x. A$	se e solo se	$C \models A$
			a <u>patto</u> che x non sia libera in C
$?$ (quantificatore esistenziale):	$?x. A \models C$	se e solo se	$A \models C$
			a <u>patto</u> che x non sia libera in C
tt (vero):	$C \models \text{tt}$	se e solo se	sempre
ff (falso):	$\text{ff} \models C$	se e solo se	sempre
\Rightarrow (implicazione):	$C \models A \Rightarrow B$	se e solo se	$C \& A \models B$

Abbreviazioni

\Leftrightarrow (doppia implicazione): $A \Leftrightarrow B \stackrel{\text{def}}{=} (A \Rightarrow B) \& (B \Rightarrow A)$

\sim (negazione): $\sim A \stackrel{\text{def}}{=} A \Rightarrow \text{ff}$

Proprietà fondamentale $\sim A \models B$ se e solo se $\sim B \models A$

Equivalenza logica

La situazione in cui $F_1 \models F_2$ e pure $F_2 \models F_1$ si abbrevia $F_1 \models\!| F_2$, leggendola “ F_1 è (logicamente) equivalente a F_2 ”.

Proprietà Nel seguito A , B , C , D e P indicheranno generiche formule ben formate.

$\models\!$ è una congruenza tra formule ben formate:

- prop. riflessiva $A \models A$.
- prop. transitiva Se $A \models B$ e $B \models C$, allora $A \models C$.
- prop. sostitutiva Se $A \models B$, allora $D[A/X] \models D[B/X]$.
- prop. simmetrica Se $A \models B$, allora $B \models A$.

Rispetto a \models , le operazioni ($\&$, \mid , \sim) formano un'algebra di Boole:

- prop. associativa $(A \& B) \& C \models A \& (B \& C)$
- prop. commutativa $A \& B \models B \& A$
- prop. di assorbimento $A \& (B \mid A) \models A$
- prop. distributiva $A \& (B \mid C) \models (A \& B) \mid (A \& C)$
- prop. dell'elemento neutro $A \& (B \mid \sim B) \models A$
- prop. di De Morgan $\sim(A \& B) \models (\sim A) \mid (\sim B)$
- prop. involutiva $\sim \sim A \models A$

Rispetto a \models , le operazioni \Rightarrow e \Leftrightarrow si definiscono come

- prop. definiente dello pseudocomplemento $A \Rightarrow B \models (\sim A) \mid B$
- prop. definiente della doppia implicazione $A \Leftrightarrow B \models (A \Rightarrow B) \& (B \Rightarrow A)$

Rispetto a \models , le operazioni $!$ e $?$ soddisfano:

- prop. di conservazione $(? x. A) \mid (? x. B) \models ? x. (A \mid B)$
- prop. dell'unità $A \& (? x. A) \models A$
- prop. della counità $? x P \models P$
- prop. quant. di De Morgan $\sim(? x. A) \models ! x. \sim A$
- prop. di α -conversione $? x. P(x) \models ? y. P(y)$
- prop. di scambio $? y. (? x. A) \models ? x. (? y. A)$
- prop. di Beck-Chevalley $? x. (A \& P) \models (? x. A) \& P$

a patto che x non sia libera in P .

Osservazione Avrete notato che molte delle equivalenze sopra ricordano l'uguaglianza di certe funzioni booleane: precisamente, se si scrivono elementi generici p, q, r, \dots dell'insieme \mathbb{B} al posto delle formule A, B, C, \dots , le funzioni determinate da ciascun membro di un'equivalenza coincidono.

Questo può indurre a pensare che, per verificare se un'equivalenza è corretta, basti controllare le tavole di verità determinate a primo e secondo membro. **Attenzione:** non è così!

In particolare, è necessario prestare molta cura nel trattare casi con quantificatori:

$$[! x(xdorme)] \Rightarrow \sim \text{Carlo dorme} \models \sim ! x(xdorme),$$

ma, in generale, $p \Rightarrow \sim q \neq \sim p$, ad esempio con $p = T$ e $q = F$.

Il calcolo con JVP \exists

Le regole del calcolo deduttivo sono codificate con il file `LaB.jt`, in riferimento a due tra i massimi artefici della loro realizzazione teorica: F. William Lawvere e George Boole.

I pannelli contengono affermazioni che devono essere dimostrate utilizzando le regole. Facendo doppio-click su una delle affermazioni, si apre una finestra che mostra che cosa si deve ottenere.

Regole principali Tutte le proprietà della conseguenza sono reversibili *a parte* due: la proprietà transitiva e la proprietà passante. Per questo, però tutte vengono mostrate in una direzione ed in questo modo vengono applicate quando invocate dal menù **Lawvere**.

<p>riflessiva $\frac{}{A \models A}$</p> <p>&-in $\frac{C \models A \quad C \models B}{C \models A \& B}$</p> <p> -in $\frac{A \models C \quad B \models C}{A \mid B \models C}$</p> <p>tt-in $\frac{}{C \models \text{tt}}$</p> <p>=>-in $\frac{C \& A \models B}{C \models A \Rightarrow B}$</p> <p>per P <u>senza</u> x libera:</p> <p>motore $\frac{\sim B \models A}{\sim A \models B}$</p>	<p>transitiva $\frac{A \models B \quad B \models C}{A \models C}$</p> <p>&-out1 $\frac{C \models A \& B}{C \models A}$</p> <p> -out1 $\frac{A \mid B \models C}{A \models C}$</p> <p>ff-in $\frac{}{\text{ff} \models C}$</p> <p>=>-out $\frac{C \models A \Rightarrow B}{C \& A \models B}$</p> <p>!-in $\frac{P \models A}{P \models !x. A}$</p> <p>?-in $\frac{A \models P}{?x. A \models P}$</p>	<p>passante $\frac{A(x) \models B(x)}{A(t) \models B(t)}$</p> <p>&-out2 $\frac{C \models A \& B}{C \models B}$</p> <p> -out2 $\frac{A \mid B \models C}{B \models C}$</p> <p>!-out $\frac{P \models !x. A}{P \models A}$</p> <p>?-out $\frac{?x. A \models P}{A \models P}$</p>
---	--	--

Mnemonicamente, il suffisso “in” si riferisce all’introduzione di un segno (da sopra a sotto), il suffisso “out” all’eliminazione del segno (sempre da sopra a sotto).

Fare dimostrazioni in JVP \exists E’ necessario notare che la dimostrazione viene costruita *a ritroso* nel senso che si inizia da ciò che si deve dimostrare e, basandosi sulla forma dell’affermazione da dimostrare, si usano le regole per modificare quanto richiesto, cecando di risalire fino a esempi di “riflessività”. In altre parole, la dimostrazione effettiva si legge *soltanto* quando si è finito.

In effetti, una volta dimostrata, un’affermazione può venire utilizzata in altre dimostrazioni: in altre parole, se si vede che l’affermazione da ottenere è (un caso particolare di) un’affermazione già dimostrata, allora basta innestare quell’albero di dimostrazione nel punto a cui si è giunti. Le dimostrazioni si svolgono applicando opportunamente le regole del calcolo. Queste si trovano in alcuni menù: uno con quelle di base, gli altri con quelle derivate sulle equivalenze.

Le dimostrazioni si svolgono

1. selezionando con il tasto sinistro una formula della conseguenza che si desidera ottenere
2. scegliendo la regola da applicare dai menù

Una volta dimostrato, un teorema può essere applicato usando il tasto Apply: è necessario

1. selezionare **il teorema da usare**
2. premere il tasto **Apply** del pannello relativo.

Le equivalenze, una volta dimostrate, possono essere applicate per sostituire formule equivalenti: è necessario

1. selezionare con il tasto centrale del mouse il **testo da sostituire**
2. scegliere l'equivalenza da applicare
 - da un menù, oppure
 - da uno dei pannelli e premere il tasto **Apply** del pannello.

Doppio-click su una formula applica sempre la regola più elementare rispetto al segno principale della formula, rispetto alla sua posizione, a sinistra o a destra, del segno di conseguenza e, in quattro casi, rispetto anche alla formula dall'altra parte del segno di conseguenza:

$P \models P \mid Q$	-out1	$!x.P \models \dots$!-out
$Q \models P \mid Q$	-out2	$\dots \models !x.P$!-in
$P \& Q \models P$	&-out1	$?x.P \models \dots$?-in
$P \& Q \models Q$	&-out2	$\dots \models ?x.P$?-out
$P \& Q \models \dots$	=>-out	$\sim P \models \dots$	\sim -def
$\dots \models P \& Q$	&-in	$\dots \models \sim P$	\sim -def
$P \mid Q \models \dots$	-out	$P \Leftrightarrow Q \models \dots$	\Leftrightarrow -def
$\dots \models P \Rightarrow Q$	=>-in	$\dots \models P \Leftrightarrow Q$	\Leftrightarrow -def

Le proprietà riflessiva, **tt**-in e **ff**-in vengono applicate automaticamente.

Nel menù **Edit**, si può scegliere come visualizzare le dimostrazioni:

- alcune ripetizioni standard di regole vengono nascoste, lasciandone menzione soltanto nella giustificazione; l'opzione **Expand all proof branches** espande l'albero,
- l'opzione **Unproven theorems may be applied** permette di applicare proprietà non dimostrate: **ATTENZIONE!** Mentre questo può essere utile durante un tentativo per cercare una strategia dimostrativa, è assolutamente sbagliato usarlo su versioni definitive. Se lo usate (l'utilizzo non è per nulla necessario), tenete presente che lo fate con un notevole rischio.

Nomenclatura per le equivalenze

nome	proprietà	proprietà duale
involutiva	$\sim \sim A \models A$	
associativa	$(A \& B) \& C \models A \& (B \& C)$	$(A \mid B) \mid C \models A \mid (B \mid C)$
commutativa	$A \& B \models B \& A$	$A \mid B \models B \mid A$
di assorbimento	$A \& (B \mid A) \models A$	$A \mid (B \& A) \models A$
distributiva	$A \& (B \mid C) \models (A \& B) \mid (A \& C)$	$A \mid (B \& C) \models (A \mid B) \& (A \mid C)$
dell'elemento neutro	$A \& \text{tt} \models A$	$A \mid \text{ff} \models A$
di De Morgan	$\sim(A \& B) \models (\sim A) \mid (\sim B)$	$\sim(A \mid B) \models (\sim A) \& (\sim B)$
pseudocomplemento	$A \Rightarrow B \models (\sim A) \mid B$	
conservazione	$?x. (A \mid B) \models (?x. A) \mid (?x. B)$	$!x. (A \mid B) \models (!x. A) \& (!x. B)$
De Morgan	$\sim(?x. A) \models !x. \sim A$	$\sim(!x. A) \models ?x. \sim A$
α -conversione	$?x. P(x) \models ?y. P(y)$	$!x. P(x) \models !y. P(y)$
di Beck-Chevalley	$?x. (A \& P) \models (?x. A) \& P$	$\forall x. (A \mid P) \models (!x. A) \mid P$
	<i>dove x non è libera in P.</i>	
funzionalità	$\text{di } \sim \frac{A \models B}{A \models \sim B}$ $\text{di } \& \frac{A \models B \quad C \models D}{A \& C \models B \& D}$ $\text{di } \Rightarrow \frac{A \models B \quad C \models D}{A \Rightarrow C \models B \Rightarrow D}$ $\text{di } \Leftrightarrow \frac{A \models B \quad C \models D}{A \Leftrightarrow C \models B \Leftrightarrow D}$ $\text{di } ? \frac{A \models B}{?x. A \models ?x. B}$	$\text{di } \mid \frac{A \models B \quad C \models D}{A \mid C \models B \mid D}$ $\text{di } ! \frac{A \models B}{!x. A \models !x. B}$
definizione di \sim	$\sim A \models A \Rightarrow \text{ff}$	
definizione di \Leftrightarrow	$A \Leftrightarrow B \models (A \Rightarrow B) \& (B \Rightarrow A)$	

Esempi A puro titolo indicativo, mostriamo come iniziare il lavoro con il dimostratore; consideriamo quattro conseguenze del pannello Lemmi:

1. Modus Ponens, cioè $(P \Rightarrow Q) \& P \models Q$,
2. Scambio, cioè $P \& Q \models Q \& P$ e
3. $P \& (P \Rightarrow Q) \models Q$,
4. esempio, cioè $!x. P(x) \models P(t)$.

1. Selezionando Modus Ponens nel pannello Lemmi e schiacciando Prove (oppure facendo doppio click su Modus Ponens), si apre una nuova finestra: in una riga in basso c'è scritto $(P \Rightarrow Q) \& P \models Q$.

Vista la forma generica delle formule coinvolte, l'unica regola che riguarda i connettivi che può avere come conseguenza desiderata è =>-out che si trova nel menù del calcolo di **Lawvere**. Invocandola, si produce l'albero

$$\frac{P \Rightarrow Q \quad | = \quad P \Rightarrow Q}{\Rightarrow\text{-out}} \\ (P \Rightarrow Q) \& P \quad | = \quad Q$$

La riga in alto è un esempio della proprietà riflessiva. Il caso è molto semplice e **JVP** completa automaticamente la dimostrazione con un riferimento alla proprietà riflessiva:

$$\frac{\text{riflessiva}}{P \Rightarrow Q \quad | = \quad P \Rightarrow Q} \\ \Rightarrow\text{-out} \\ (P \Rightarrow Q) \& P \quad | = \quad Q$$

E' possibile usare un modo rapido per completare la dimostrazione sopra: visto che la scrittura della formula a primo membro della conseguenza individua un'unica regola che può averla prodotta, facendo doppio click sul primo membro, si invoca direttamente =>-out.

2. Aprendo la finestra di dimostrazione di **Scambio**, in basso compare la conseguenza $P \& Q \quad | = \quad Q \& P$. La congiunzione a secondo membro indica che si ottiene quella conseguenza se (e solo se) si ottengono le due conseguenze $P \& Q \quad | = \quad Q$ e $P \& Q \quad | = \quad P$. Scegliendo &-in nel menù del calcolo di **Lawvere**, si risale a quelle due conseguenze—anche in questo caso, dato che la formula a secondo membro determina un'unica regola, un doppio click produce lo stesso risultato—:

$$\frac{P \& Q \quad | = \quad Q \qquad P \& Q \quad | = \quad P}{\&\text{-in}} \\ P \& Q \quad | = \quad Q \& P$$

Usando la regola &-out2, si riduce a dimostrare la correttezza della prima conseguenza a quella della conseguenza

$$\frac{P \& Q \quad | = \quad P \& Q}{\&\text{-out2}} \\ \frac{P \& Q \quad | = \quad Q \qquad P \& Q \quad | = \quad P}{\&\text{-in}} \\ P \& Q \quad | = \quad Q \& P$$

che si verifica immediatamente grazie alla proprietà riflessiva. Anche in questo caso, la forma del primo membro e la concordanza con il secondo permettono di ottenere l'applicazione della regola con un doppio click sul primo membro. si opera in modo simile per la conseguenza a destra e si ottiene la dimostrazione

$$\frac{\text{riflessiva}}{P \& Q \quad | = \quad P \& Q} \qquad \frac{\text{riflessiva}}{P \& Q \quad | = \quad P \& Q} \\ \&\text{-out2} \qquad \&\text{-out1} \\ \frac{P \& Q \quad | = \quad Q \qquad P \& Q \quad | = \quad P}{\&\text{-in}} \\ P \& Q \quad | = \quad Q \& P$$

3. Aprendo la finestra di dimostrazione di $P \&(P \Rightarrow Q) \quad | = \quad Q$, in basso compare la conseguenza da dimostrare. A meno di uno scambio delle due sotto-formule del primo membro, è come il

Modus Ponens. Si può dunque applicare **Scambio** già dimostrata: si seleziona la conseguenza nel pannello Lemmi e si schiaccia il bottone **Apply** in basso nel pannello:

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\text{theorem Scambio}} \quad \frac{}{\text{theorem Modus Ponens}} \\
 P \&(P \Rightarrow Q) \models (P \Rightarrow Q) \& P \qquad (P \Rightarrow Q) \& P \models Q \\
 \hline
 \text{transitiva} \\
 P \&(P \Rightarrow Q) \models Q
 \end{array}$$

Si può anche dimostrare direttamente applicando la proprietà **transitiva**: si sceglie dal menù del calcolo di Lawvere per passare al seguente albero

$$\frac{P \&(P \Rightarrow Q) \models _T \qquad _T \models Q}{\text{transitiva}} P \&(P \Rightarrow Q) \models Q$$

\exists indica con una linea bassa $_T$ davanti al segno che quanto introdotto non è ancora determinato dalla strategia di dimostrazione scelta. il nostro scopo è di dimostrare la correttezza della conseguenza così:

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\text{riflessiva}} \quad \frac{}{\text{riflessiva}} \quad \frac{}{\text{riflessiva}} \\
 P \&(P \Rightarrow Q) \models P \&(P \Rightarrow Q) \quad P \&(P \Rightarrow Q) \models P \&(P \Rightarrow Q) \quad P \Rightarrow Q \models P \Rightarrow Q \\
 \hline
 \frac{}{\&-out2} \quad \frac{}{\&-out1} \quad \frac{}{\Rightarrow-out} \\
 P \&(P \Rightarrow Q) \models P \Rightarrow Q \quad P \&(P \Rightarrow Q) \models P \quad (P \Rightarrow Q) \& P \models Q \\
 \hline
 \frac{}{\&-in} \quad \frac{}{\Rightarrow-out} \\
 P \&(P \Rightarrow Q) \models (P \Rightarrow Q) \& P \quad (P \Rightarrow Q) \& P \models Q \\
 \hline
 \text{transitiva} \\
 P \&(P \Rightarrow Q) \models Q
 \end{array}$$

Selezionando con il tasto sinistro uno dei rami e scegliendo la regola opportuna (ad esempio, $P \&(P \Rightarrow Q) \models _T$ scegliendo poi la regola $\&-in$), si inizia a descrivere come deve essere fatta la formula $_T$.

4. Aprendo la finestra di dimostrazione di **esempio**, si apre una nuova finestra: in basso compare la conseguenza $\exists x. P(x) \models P(t)$ da dimostrare. La dimostrazione che si vuole ottenere utilizza in modo essenziale la regola **passante** ed potrebbe essere la seguente

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\text{riflessiva}} \\
 \exists x. P(x) \models \exists x. P(x) \\
 \hline
 \frac{}{\exists-out} \\
 \exists x. P(x) \models P(x) \\
 \hline
 \text{passante} \\
 \exists x. P(x) \models P(t)
 \end{array}$$

La regola **passante** deve essere invocata selezionando con il tasto centrale il **termine** che va sostituito: selezionando t si ottiene

$$\frac{\exists x. P(x) \models P(x1)}{\text{passante}} \exists x. P(x) \models P(t)$$

Usando la regola **!-out** selezionando la variabile **x1** coinvolta nella quantificazione si conclude. Consideriamo ora brevemente un'affermazione nel pannello **Equivalenze: unita' per ?**, cioè $P \& ?x. P \models P$.

Aperto la finestra di dimostrazione, si seleziona subito dal menù **merge** la definizione di equivalenza **E-def**, per passare a

$$\frac{P \& ?x. P \models P \qquad P \models P \& ?x. P}{P \& ?x. P \models P} \text{E-def}$$

Il ramo a sinistra si completa facilmente con un doppio click e un doppio click riduce il ramo a sinistra lasciando la conseguenza $P \models ?x. P$ che si chiude selezionando con il tasto centrale la variabile **x** e un'applicazione della regola **∃-out** (basta un doppio click sulla formula a destra).

Regole derivate E' facile trasformare una conseguenza dimostrata in una regola aggiuntiva (o **derivata** come si usa dire). Consideriamo ad esempio la conseguenza

$$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \models (Q \& P) \Rightarrow R$$

e vogliamo dimostrare $P \& (Q \mid R) \models (P \& Q) \mid (P \& R)$. Applicando la conseguenza sopra come regola con il tasto **Apply as a Rule**, si riduce la conseguenza a

$$Q \mid R \models P \& ((P \& Q) \mid (P \& R)).$$

Con un doppio click a sinistra si riduce questo alle due

$$Q \models P \& ((P \& Q) \mid (P \& R)) \qquad R \models P \& ((P \& Q) \mid (P \& R))$$

e non è ora difficile concludere. Conviene notare però che il modo più rapido per concludere è quello di applicare

$$(Q \& P) \Rightarrow R \models P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$$

come regola.

Questo giustifica la regola **C – car** per “ricostruire” un'equivalenza da una conseguenza dato che

$$A \models B \quad \text{se e solo se} \quad \text{tt} \models A \Leftrightarrow B.$$

Come vanificare una conseguenza logica

Abbiamo visto finora come dalle regole iniziali, che controllano il comportamento dei connettivi e dei quantificatori, si riescono a dimostrare molti metodi di ragionamento. Una domanda che dovrebbe sorgere naturale a questo punto è la seguente: si dimostrano **tutti** i metodi di ragionamento a partire dalle regole iniziali?

Ma, una volta posta la domanda, si realizza che non è per niente chiaro che cosa si intende per “metodo di ragionamento”, nè tantomeno si sa quali sono **tutti**...

Ricapitolando brevissimamente quanto si è fatto finora, abbiamo dichiarato alcune proprietà della conseguenza logica e, mediante semplici dimostrazioni algebriche, abbiamo derivato molte proprietà dei connettivi e quantificatori, imparando al tempo stesso a usare una **stenografia** molto elementare per abbreviare i costituenti del linguaggio: ad esempio, **&**, **|**, **!**.

Per spiegare che cosa si intende per “conseguenza logica”, sarebbe ora il momento di darne la precisa definizione matematica. Per comprenderla e apprezzarla semanticamente, è necessario una buona esperienza (forse è meglio dire malizia) matematica. Rimandiamo per quella all'appendice.

Invece, considereremo da qui in avanti il problema di capire se, assegnata una conseguenza $P \models Q$, è impossibile trovarne una dimostrazione. Nel condurre l'analisi di questo problema, troveremo

1. un metodo standard per cercare una dimostrazione,
2. un'intuizione, simile a quella usata finora, del "significato" di conseguenza.

E' probabilmente già chiaro che, considerato il problema $P \models Q$, si possono costruire diverse dimostrazioni della sua correttezza (se ne esistono). Questo rende estremamente complesso il problema di determinare che non ne esiste una: non basta dire che non siamo capaci di trovarla perchè non è per niente detto che stiamo seguendo il percorso corretto per farla.

La proprietà cruciale a questo punto è la seguente:

$$P \models Q \quad \text{se e solo se} \quad P \& \sim Q \models \text{ff}.$$

In altre parole, il problema della conseguenza iniziale si riduce ad un problema dove la conseguenza ha l'affermazione **ff** a secondo membro. In altre parole, possiamo spostare tutta l'informazione a sinistra del segno \models (a destra c'è sempre e solo **ff**).

Ci saranno congiunzioni da trattare: abbiamo imparato che, a meno di proprietà associative e commutative, riusciamo a usare una qualunque delle formule congiunte. Per comprimere l'informazione data dai congiunti, scriveremo la loro lista che sarà trattata a meno dell'ordine e di ripetizioni:

$$\frac{A, B \models \text{ff}}{A \& B \models \text{ff}} \quad \frac{B, A \models \text{ff}}{A, B \models \text{ff}} \quad \frac{A \models \text{ff}}{A, A \models \text{ff}}$$

Potremo trattare ogni disgiunzione nella lista in modo equivalente, spezzando il procedimento in due casi

$$\frac{A \models \text{ff} \quad B \models \text{ff}}{A \mid B \models \text{ff}}$$

grazie alla proprietà definitoria della disgiunzione come aggiunto. A questo punto, le combinazioni di connettivi e negazioni vengono gestite riscrivendole in modi equivalenti usando congiunzioni e disgiunzioni, ad esempio

$$\frac{\sim A \models \text{ff} \quad B \models \text{ff}}{A \Rightarrow B \models \text{ff}} \quad \frac{\sim A, \sim B \models \text{ff}}{\sim(A \mid B) \models \text{ff}}$$

Per la negazione, le uniche modifiche che possiamo fare sono quella di cancellare una ripetizione di negazioni

$$\frac{A \models \text{ff}}{\sim \sim A \models \text{ff}}$$

e quella di riconoscere che è corretta una conseguenza con **ff** a secondo membro e la congiunzione di una formula e della sua negazione a primo membro:

$$\frac{}{A, \sim A \models \text{ff}}$$

Infine, il caso paradigmatico dei quantificatori è quello con l'esistenziale: la lista $E, ?v. A, F$ è scritta come abbreviazione di una congiunzione, diciamo $E \& (?v. A(v) \& F)$ dove facciamo in modo che in E e in F non compaia la variabile v , magari usando l'equivalenza di α -conversione. Usando le proprietà di commutatività e di Beck-Chevalley, questa si riscrive equivalentemente come $?v. (E \& (A(v) \& F))$; in altre parole, stiamo considerando di dimostrare la conseguenza

$$?v. E \& (A(v) \& F) \models \text{ff}.$$

Dato che l'affermazione quantificata esistenzialmente compare a sinistra e nell'affermazione a destra (che è **ff**) non compare la variabile v , la conseguenza considerata è corretta se e solo se la conseguenza

$$E \& (A(v) \& F) \models \text{ff}$$

dove dobbiamo notare che la variabile v è usata in $A(v)$: per fare questo e per distinguere radicalmente le variabili che ancora sono quantificate in E o in F , cambiamo il nome usato e lo indichiamo a parte, dopo la conseguenza così

$$(\dagger) \quad \frac{A(a) \models \text{ff}, a}{?v. A(v) \models \text{ff}}$$

Il trattamento di una formula $\sim !v. A(v)$ è del tutto simile

$$(\ddagger) \quad \frac{\sim A(a) \models \text{ff}, a}{\sim !v. A(v) \models \text{ff}}$$

Infine, formule del tipo $!v. A(v)$ o del tipo $\sim ?v. A(v)$ non possono essere modificate: dato che

$$!v. A(v) \models !v. A(v) \& A(t)$$

possiamo soltanto elencare tutti i casi dove t è via via ciascuna delle variabili a, a_1, \dots che usiamo nei casi (\dagger) e (\ddagger) :

$$\frac{!v. A(v), A(a) \models \text{ff}, \dots, a, \dots}{!v. A(v) \models \text{ff}, \dots, a, \dots} \quad \frac{\sim ?v. A(v), \sim A(a) \models \text{ff}, \dots, a, \dots}{\sim ?v. A(v) \models \text{ff}, \dots, a, \dots}$$

Caricando H.j si ottiene un'estensione di LaB.jt con un nuovo menù Hintikka che permette tentare di refutare una conseguenza.

Ogni verifica deve cominciare con **prima mossa** per applicare **zot** come regola e trasformare la conseguenza in una equivalente con **ff** a secondo membro.

Come abbiamo suggerito, una regola

$$\frac{E_1, \dots, E_\ell, A \models \text{ff}, \{a_1, \dots, a_j\} \quad E_1, \dots, E_\ell, B \models \text{ff}, \{b_1, \dots, b_j\}}{E_1, \dots, E_\ell, C \models \text{ff}, \{c_1, \dots, c_k\}}$$

opera in dipendenza di una precisa formula nella lista ad antecedente, può coinvolgere qualche variabile, e non modifica le altre formule E_1, \dots, E_ℓ . Non scriveremo mai la lista di formule e scriveremo l'elenco di variabili soltanto quando una di queste è coinvolta nell'uso della regola.

Le **regole strutturali** servono a gestire le liste di formule:

$$\frac{A \models \text{ff}}{A, A \models \text{ff}} \text{copia} \quad \frac{B, A \models \text{ff}}{A, B \models \text{ff}} \text{scambio} \quad \frac{}{A, \sim A \models \text{ff}} \text{X} \quad \frac{}{\sim \text{tt} \models \text{ff}} \text{X-tt} \quad \frac{}{\text{ff} \models \text{ff}} \text{X-ff}$$

Le altre regole vengono distinte in α -regole e β -regole a secondo dei casi a numeratore:

α -regole:

$$\frac{A \models \text{ff}}{\sim \sim A \models \text{ff}} \alpha \sim \quad \frac{A, B \models \text{ff}}{A \& B \models \text{ff}} \alpha \& \quad \frac{\sim A, \sim B \models \text{ff}}{\sim(A \mid B) \models \text{ff}} \alpha \mid \quad \frac{A, \sim B \models \text{ff}}{\sim(A \Rightarrow B) \models \text{ff}} \alpha \Rightarrow$$

$$\frac{!v. A, A(a) \models \text{ff}, \{\dots, a, \dots\}}{!v. A(v) \models \text{ff}, \{\dots, a, \dots\}} \alpha ! \quad \frac{\sim ?v. A, \sim A(a) \models \text{ff}, \{\dots, a, \dots\}}{\sim ?v. A(v) \models \text{ff}, \{\dots, a, \dots\}} \alpha ?$$

β -regole:

$$\begin{array}{c}
\frac{\sim A \models \text{ff} \quad \sim B \models \text{ff}}{\sim(A \& B) \models \text{ff}} \beta \& \quad \frac{A \models \text{ff} \quad B \models \text{ff}}{A \mid B \models \text{ff}} \beta \mid \quad \frac{\sim A \models \text{ff} \quad B \models \text{ff}}{A \Rightarrow B \models \text{ff}} \beta \Rightarrow \\
\frac{A \& B \models \text{ff} \quad (\sim A) \& (\sim B) \models \text{ff}}{A \Leftrightarrow B \models \text{ff}} \beta_1 \Leftrightarrow \quad \frac{A \& (\sim B) \models \text{ff} \quad (\sim A) \& B \models \text{ff}}{\sim(A \Leftrightarrow B) \models \text{ff}} \beta_2 \Leftrightarrow \\
\frac{\sim A(a) \models \text{ff}, \{\dots, a, \dots\}}{\sim ! v. A(v) \models \text{ff}, \{\dots, \hat{a}, \dots\}} \beta ! \quad \frac{A(a) \models \text{ff}, \{\dots, a, \dots\}}{? v. A(v) \models \text{ff}, \{\dots, \hat{a}, \dots\}} \beta ?
\end{array}$$

La notazione \hat{a} indica che l'elemento a è stato cancellato dall'elenco.

Uso con $\forall \exists$ Tutte le regole sono applicate automaticamente con il comando `riduci`, a esclusione delle regole α per quantificatori: in questi casi, è necessario l'intervento dell'utente che deve indicare su quale formula operare e deve selezionare in giallo un elemento **a** della lista a secondo membro (dopo la formula `ff`) nel caso ne compaiano più di uno.

Non è possibile applicare verifiche completate ad altre verifiche.

Una mancata verifica non offre la possibilità di chiudere la dimostrazione.

La voce `copia` nel menù `Regole` cancella ripetizioni di formule: viene sempre applicata automaticamente.

Hauptsatz

A TEOREMA *Tutti i rami di un albero costruito su $P \models Q$ chiudono se e solo se la conseguenza è dimostrabile.*

Proof: Si verifica facilmente che, per ogni regola del menù `Hintikka`

$$\frac{A', B', \dots \models \text{ff} \quad A'', B'', \dots \models \text{ff}}{A, B, \dots \models \text{ff}}$$

la regola

$$\frac{A' \& (B' \& \dots) \models \text{ff} \quad A'' \& (B'' \& \dots) \models \text{ff}}{A \& (B \& \dots) \models \text{ff}}$$

è derivabile in `LaB.jt`, cioè la conseguenza

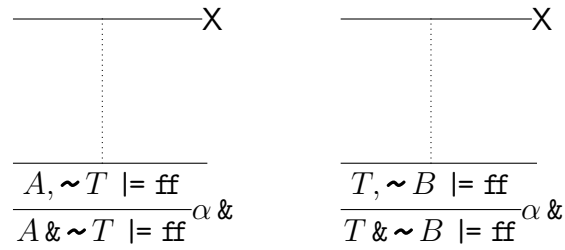
$$(A' \& (B' \& \dots) \Rightarrow \text{ff}) \& (A'' \& (B'' \& \dots) \Rightarrow \text{ff}) \models A \& (B \& \dots) \Rightarrow \text{ff}$$

è corretta. Questo è essenzialmente suggerito nella discussione che precede l'elenco delle regole del menù `Hintikka`. In questo modo si capisce che ogni volta che si chiude un albero usando le regole del menù `Hintikka` si ottiene lo stesso risultato con opportune regole del menù `Lawvere`. Viceversa, bisogna dimostrare che, per ogni regola del menù `Lawvere`

$$\frac{A' \models B' \quad A'' \models B''}{A \models B},$$

se le due conseguenze $A' \models B'$ e $A'' \models B''$ a numeratore producono con **prima mossa** conseguenze i cui rami chiudono, **allora** la conseguenza $A \models B$ produce con **prima mossa** un albero i cui rami chiudono. **E' necessario** fare attenzione ad introdurre correttamente eventuali liste di variabili libere per le regole che coinvolgono i quantificatori.

E' facile farlo per tutte le regole esclusa la proprietà transitiva. In questo caso, la situazione è descritta visivamente qui sotto: ci sono alberi tutti i cui rami chiudono



Si deve mostrare che l'albero con radice

$$\frac{A, \sim B \mid = \text{ff}}{A \& \sim B \mid = \text{ff}} \alpha \&$$

ha tutti i rami che chiudono.

Si dimostra per induzione sul numero di segni logici nella formula T —che chiameremo **di taglio**—che

per formule qualunque $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m$,
 se $\left\{ \begin{array}{l} \text{l'albero con radice } A_1, \dots, A_n, T \mid = \text{ff} \text{ chiude} \\ \text{e} \\ \text{l'albero con radice } \sim T, B_1, \dots, B_m \mid = \text{ff} \text{ chiude,} \end{array} \right.$
 allora anche l'albero con radice $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \mid = \text{ff}$ chiude.

Nel seguito assumeremo per ogni possibile forma di T che gli alberi con radice $A_1, \dots, A_n, T \mid = \text{ff}$ e con radice $\sim T, B_1, \dots, B_m \mid = \text{ff}$ chiudono:

- Sia T è **ff**. L'albero con radice $\sim \text{ff}, B_1, \dots, B_m \mid = \text{ff}$ chiude indipendentemente dalla formula di taglio: infatti, $\sim \text{ff}$ viene utilizzata per chiudere esattamente se compare anche **ff** che viene estratta da qualche B_1, \dots, B_m . Ma, in tal caso, basta la regola **X-ff**. Dunque anche l'albero con radice $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \mid = \text{ff}$ chiude.
- L'argomento è simile se T è **tt**.
- Sia T è $\sim T_1$. Dall'ipotesi che l'albero con radice $\sim \sim T_1, B_1, \dots, B_m \mid = \text{ff}$ chiude, discende che anche l'albero con radice $T_1, B_1, \dots, B_m \mid = \text{ff}$. Applicando l'ipotesi induttiva a T_1 , si conclude.
- Sia T è $T_1 \& T_2$. Dall'ipotesi discende che i due alberi con radice $\sim T_1, B_1, \dots, B_m \mid = \text{ff}$ e con radice $\sim T_2, B_1, \dots, B_m \mid = \text{ff}$ chiudono. Applicando l'ipotesi induttiva alla coppia di alberi con radice $A_1, \dots, A_n, T_1, T_2 \mid = \text{ff}$ e con radice $\sim T_2, B_1, \dots, B_m \mid = \text{ff}$ si ottiene che l'albero con radice $A_1, \dots, A_n, T_1, B_1, \dots, B_m \mid = \text{ff}$ chiude. Applicando ora l'ipotesi induttiva a questo e all'albero con radice $\sim T_1, B_1, \dots, B_m \mid = \text{ff}$ si ottiene la tesi.
- L'argomento è simile se T è $T_1 \mid T_2$ o $T_1 \Rightarrow T_2$ o $T_1 \Leftrightarrow T_2$.
- Sia T è $?x.T_1(x)$. Gli alberi con radice $A_1, \dots, A_n, T_1(a) \mid = \text{ff}$ e con radice $\sim T_1(a), B_1, \dots, B_m \mid = \text{ff}$ chiudono. Applicando l'ipotesi induttiva si ottiene la tesi.
- L'argomento è simile se T è $!x.T_1(x)$. □

I rami che non vengono chiusi offrono un modo per intuire un controesempio alla conseguenza che si intendeva dimostrare.

Il calcolo della Deduzione Naturale di Gentzen

L'analisi della costruzione di una dimostrazione ci ha portato a considerare una “lista” di formule a sinistra del segno di conseguenza, *come se* fosse una congiunzione di formule. Anche se in totale antitesi al metodo dei diagrammi semantici, questo permette di introdurre un calcolo deduttivo con regole che modificano soltanto la formula a secondo membro:

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\Gamma, A \vdash A} \text{hyp} \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B} \text{deb} \quad \frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B} \text{dup} \quad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B} \text{taglio} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \& B} \&\text{-intro} \quad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \mid B} \mid\text{-intro1} \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \mid B} \mid\text{-intro2} \quad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \Rightarrow\text{-intro} \\
 \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash B \Rightarrow A}{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B} \Leftrightarrow\text{-intro} \quad \frac{\Gamma, A \vdash \text{ff}}{\Gamma \vdash \sim A} \sim\text{-intro} \quad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \sim A}{\Gamma \vdash \text{ff}} \text{ff-intro} \\
 \\
 \frac{}{\Gamma \vdash \text{tt}} \text{tt-intro} \\
 \\
 \frac{\Gamma, c \text{ generico} \vdash A(c)}{\Gamma \vdash !x. A(x)} \text{!-intro} \quad \frac{\Gamma, t \text{ dato} \vdash A(t)}{\Gamma \vdash ?x. A(x)} ?\text{-intro} \\
 \text{a patto che } c \text{ non compaia in } \Gamma \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash A \& B}{\Gamma \vdash A} \&\text{-elim1} \quad \frac{\Gamma \vdash A \& B}{\Gamma \vdash A} \&\text{-elim2} \quad \frac{\Gamma \vdash A \mid B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} \mid\text{-elim} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \Rightarrow B}{\Gamma \vdash B} \Rightarrow\text{-elim} \quad \frac{\Gamma \vdash \sim \sim A}{\Gamma \vdash A} \sim\text{-elim} \quad \frac{\Gamma \vdash \text{ff}}{\Gamma \vdash A} \text{ff-elim} \quad \frac{\Gamma, \text{tt} \vdash A}{\Gamma \vdash A} \text{tt-elim} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash B \quad \Gamma \vdash A \Leftrightarrow B}{\Gamma \vdash A} \Leftrightarrow\text{-elim1} \quad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \Leftrightarrow B}{\Gamma \vdash B} \Leftrightarrow\text{-elim2} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash !x. A(x) \quad \Gamma \vdash t \text{ dato}}{\Gamma \vdash A(t)} \text{!-elim} \quad \frac{\Gamma \vdash ?x. A(x) \quad \Gamma, c \text{ generico}, A(c) \vdash C}{\Gamma \vdash C} ?\text{-elim} \\
 \text{a patto che } c \text{ non compaia} \\
 \text{in } \Gamma \text{ e in } ?x. A(x)
 \end{array}$$

La deduzione naturale in JVP \exists Modificare soltanto la formula a secondo membro della conseguenza permette di “codificare” il calcolo deduttivo in una forma geometrica che si avvicina moltissimo alla pratica comune di discorso, usando il metodo “a scatole” di Fitch.

Le regole sono contenute nella teoria `DedNat.jt`. Le operazioni si ottengono quasi sempre con un doppio click sulla formula più complessa da ottenere.

Selezionando l'opzione **Box display** nel menù `Edit`, si passa dalla rappresentazione ad albero alla rappresentazione a scatole annidate. Una scatola sta ad indicare che, per ottenere quanto desiderato, si deve dimostrare la conseguenza che ha come ipotesi la lista di formule in cima alla scatola e che ha come tesi la formula in fondo alla scatola. Come al solito si possono invocare conseguenze già dimostrate.

Nel caso di regole con argomento (ad esempio, `!-elim` o `ff-intro`) è possibile (e conveniente) selezionare in giallo **X** quanto si intende sfruttare.

Si possono derivare le regole della deduzione naturale nel calcolo `LaB.jt` caricando il file `G.j`.

La logica del prim'ordine

Una **logica** è l'astrazione matematica di quanto abbiamo fatto finora. I suoi dati fondamentali sono i seguenti:

- un **linguaggio** con cui scrivere variabili x, y, \dots , termini t, s, \dots e affermazioni P, Q, \dots
- un **calcolo deduttivo** formale
- un' **interpretazione** astratta in strutture matematiche opportune.
- se possibile, due teoremi che collegano il calcolo deduttivo e l'interpretazione astratta— detti solitamente **di correttezza** e **di completezza**.

Un **linguaggio** \mathcal{L} della *cosiddetta* logica del prim'ordine consiste di

1. una **segnatura** Σ , cioè una lista $\Sigma = (f^{[n]}, g^{[m]}, h^{[k]}, \dots)$ di **segni** f, g, h, \dots e numeri interi positivi o nulli n, m, k, \dots , uno per ogni segno. Si dice che $f^{[n]}$ è un **segno per operazione n -aria** o anche **simbolo per operazione n -aria**. Un segno per operazione 0-aria (si legge **zeroaria**) si dice anche **costante**.
2. una **segnatura relazionale** Θ , cioè una lista $\Theta = (T^{[p]}, V^{[q]}, W^{[r]}, \dots)$ di **simboli per relazione** T, V, W, \dots e numeri interi positivi o nulli p, q, r, \dots , uno per ogni simbolo per relazione. Si dice che $T^{[p]}$ è un **predicato n -ario** o anche **simbolo per relazione p -aria**. Un predicato 0-ario si dice anche **proposizione**.
3. un'insieme X i cui elementi sono detti **variabili**, ad esempio si pensi ad X che consiste degli elementi $x, x_1, x_2, \dots, y, y_1, y_2, \dots, z, z_1, z_2, \dots$

Si scrive $\mathcal{L} = (\Sigma, \Theta, X)$.

Si dice **termine** nel linguaggio \mathcal{L} una stringa dell'alfabeto $\Sigma \cup X \cup \{(\, , \,)\}$ ottenuto mediante le seguenti clausole:

- un elemento di X è un termine
- se $e^{[0]}$ è in Σ , allora e è un termine
- se $f^{[n]}$ è in Σ , $n > 0$ e t_1, t_2, \dots, t_n sono termini, allora $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ è un termine.

E' possibile trovare le ultime due clausole raggruppate in una sola: basta cancellare la condizione $n > 0$. In tal caso, il termine determinato da $e^{[0]}$ si scrive $e()$.

In forma BN, la sintassi dei termini è la seguente:

$$\text{term} ::= x \mid e \mid f(\text{term}, \dots, \text{term})$$

per $e^{[0]}, f^{[n]} \in \Sigma$.

Chiaramente, il dato Θ non serve per determinare i termini di \mathcal{L} .

Si dice **formula ben formata** (abbreviato f.b.f.) nel linguaggio \mathcal{L} una stringa dell'alfabeto $\Sigma \cup \Theta \cup X \cup \{(\, , \,)\}$ ottenuto mediante le seguenti clausole:

- **ff** e **tt** sono f.b.f.
- se $V^{[0]}$ è in Θ , allora V è una f.b.f.
- se $T^{[p]}$ è in Θ , $p > 0$ e t_1, t_2, \dots, t_p sono termini, allora $T(t_1, t_2, \dots, t_p)$ è una f.b.f.

- se P è una f.b.f., allora $\sim P$ è una f.b.f.
- se P e Q sono f.b.f., allora $P \& Q$, $P \mid Q$, $P \Rightarrow Q$, $P \Leftrightarrow Q$ sono f.b.f.
- se x è una variabile in X e P è una f.b.f., allora $!x.P$ e $?x.P$ sono f.b.f.

In forma BN, la sintassi delle f.b.f. è la seguente:

$$\text{fbf} ::= \text{ff} \mid \text{tt} \mid V \mid T(\text{term}, \dots, \text{term}) \mid \sim \text{fbf} \mid \text{fbf} \otimes \text{fbf} \mid Qx. \text{fbf}$$

per $V^{[0]}, T^{[p]} \in \Sigma$

$$\otimes ::= \& \mid \mid \mid \Rightarrow \mid \Leftrightarrow$$

$$Q ::= ! \mid ?.$$

Si dice **sequente** nel linguaggio \mathcal{L} una scrittura $\Gamma \vdash A$ che consiste di una lista $\Gamma = G_1, G_n, \dots, G_\ell$ di f.b.f. e una f.b.f. A separate da una lettera \top coricata.

Una volta fissato il linguaggio, si fissa il calcolo deduttivo: l'esempio principale di calcolo deduttivo è il calcolo della deduzione naturale. Altre scelte possibili sono il calcolo dei diagrammi semantici, il calcolo formale della conseguenza logica, il calcolo di Hilbert, il calcolo delle equivalenze.

Per ciascun sequente $\Gamma \vdash A$ in cui compaiono libere al massimo le variabili x_1, \dots, x_i , si definisce la sua **traduzione** nel calcolo fissato. L'elenco delle traduzioni per i calcoli studiati è il seguente:

calcolo deduttivo	traduzione di $\Gamma \vdash A$
deduzione naturale	x_1 generico, \dots, x_i generico, $\Gamma \vdash A$
conseguenza logica	$G_1 \& (G_2 \& (\dots \& G_\ell) \dots) \models A$
diagrammi semantici	$\Gamma, \sim A \models \text{ff}, \{x_1, \dots, x_i\}$
calcolo di Hilbert	$\text{tt} \models !x_1, \dots, !x_i. ((G_1 \& (G_2 (\& \dots \& G_\ell) \dots)) \Rightarrow A)$
equivalenza logica	$G_1 \& (G_2 (\& \dots \& G_\ell) \dots) \& A \models G_1 \& (G_2 (\& \dots \& G_\ell) \dots)$

Si dice **teorema formale** un sequente la cui traduzione compare alla radice di un albero completo costruito usando le regole del calcolo.

Sappiamo che

$\Gamma \vdash A$ è un teorema formale del calcolo della conseguenza logica se e solo se

$\Gamma \vdash A$ è un teorema formale del calcolo della equivalenza logica se e solo se

$\Gamma \vdash A$ è un teorema formale del calcolo dei diagrammi semantici se e solo se

$\Gamma \vdash A$ è un teorema formale del calcolo della deduzione naturale.

Inoltre, se $\Gamma \vdash A$ è un teorema formale del calcolo di Hilbert, allora è un teorema formale del calcolo della conseguenza logica (dunque, di tutti gli altri). Si può dimostrare anche il risultato inverso.

E' utile notare che l'elenco dei calcoli deduttivi non termina con quelli sopra: sono da aggiungere almeno i nomi del calcolo deduttivo con conseguenti multipli (introdotto da Gentzen) e del calcolo della risoluzione logica (introdotto da Robinson).

Fissato il linguaggio \mathcal{L} una struttura astratta per interpretare le f.b.f. di \mathcal{L} consiste di una lista $\mathcal{I} = (U, \llbracket f \rrbracket, \llbracket g \rrbracket, \llbracket h \rrbracket, \dots, \llbracket T \rrbracket, \llbracket V \rrbracket, \llbracket W \rrbracket, \dots)$ dove

- U è un insieme
- $\llbracket f^{[n]} \rrbracket: U^n \rightarrow U$ è un'operazione n -aria su U , $\llbracket g^{[m]} \rrbracket: U^m \rightarrow U$ ecc.
- $\llbracket T^{[p]} \rrbracket \subseteq U^p$ è una relazione p -aria su U , $\llbracket V^{[q]} \rrbracket \subseteq U^q$ ecc.

L'interpretazione si estende ai termini e alle formule ben formate "leggendo i loro costituenti nella struttura data": ad esempio, $\llbracket T(f(x), e) \mid V(x, y) \rrbracket_{x,y}$ è la relazione binaria (dato che sono specificate in ordine due variabili libere)

$$\{(u_1, u_2) \in U^2 \mid (\llbracket f \rrbracket(u_1), \llbracket e \rrbracket) \in \llbracket T \rrbracket\} \cup \{(u_1, u_2) \in U^2 \mid (u_1, u_2) \in \llbracket V \rrbracket\} \subseteq U^2.$$

Formalmente si definiscono l'interpretazione $\llbracket t \rrbracket_{x_1, \dots, x_n}$ di un termine t e l'interpretazione $\llbracket P \rrbracket$ di una formula P per induzione sulla loro formazione:

t	$\llbracket t \rrbracket_{x_1, \dots, x_i} : U^i \rightarrow U$
x_j	$(u_1, \dots, u_i) \mapsto u_j$
e	$(u_1, \dots, u_i) \mapsto \llbracket e \rrbracket$
$f(t_1, \dots, t_n)$	$(u_1, \dots, u_i) \mapsto \llbracket f \rrbracket(\llbracket t_1 \rrbracket_{x_1, \dots, x_i}(u_1, \dots, u_i), \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{x_1, \dots, x_i}(u_1, \dots, u_i))$
P	$\llbracket P \rrbracket_{x_1, \dots, x_i} \subseteq U^i$
$T(t_1, \dots, t_p)$	$\{(u_1, \dots, u_i) \mid (\llbracket t_1 \rrbracket_{x_1, \dots, x_i}(u_1, \dots, u_i), \dots, \llbracket t_p \rrbracket_{x_1, \dots, x_i}(u_1, \dots, u_i)) \in \llbracket T \rrbracket\}$
$\sim P_1$	$U^i \setminus \llbracket P_1 \rrbracket_{x_1, \dots, x_i}$
$P_1 \& P_2$	$\llbracket P_1 \rrbracket_{x_1, \dots, x_i} \cap \llbracket P_2 \rrbracket_{x_1, \dots, x_i}$
$P_1 \mid P_2$	$\llbracket P_1 \rrbracket_{x_1, \dots, x_i} \cup \llbracket P_2 \rrbracket_{x_1, \dots, x_i}$
$P_1 \Rightarrow P_2$	$(U^i \setminus \llbracket P_1 \rrbracket_{x_1, \dots, x_i}) \cup \llbracket P_2 \rrbracket_{x_1, \dots, x_i}$
$P_1 \Leftrightarrow P_2$	$(\llbracket P_1 \rrbracket_{x_1, \dots, x_i} \cap \llbracket P_2 \rrbracket_{x_1, \dots, x_i}) \cup ((U^i \setminus \llbracket P_1 \rrbracket_{x_1, \dots, x_i})(U^i \setminus \llbracket P_2 \rrbracket_{x_1, \dots, x_i}))$
$! x. P_1$	$\{(u_1, \dots, u_i) \mid (u_1, \dots, u_i, u) \in \llbracket P_1 \rrbracket_{x_1, \dots, x_i, x} \text{ per ogni } u \in U\}$
$? x. P_1$	$\{(u_1, \dots, u_i) \mid (u_1, \dots, u_i, u) \in \llbracket P_1 \rrbracket_{x_1, \dots, x_i, x} \text{ per qualche } u \in U\}$

Sia F una f.b.f. nel linguaggio \mathcal{L} , siano x_1, \dots, x_i le variabili libere che compaiono in F . Si dice che F è **vera** nell'interpretazione \mathcal{I} se $\llbracket F \rrbracket_{x_1, \dots, x_i} = U^i$. In particolare, se F non ha variabili libere, F è vera in \mathcal{I} se $\llbracket F \rrbracket = U^0$.

Si dice che \mathcal{I} è **modello** di un sequente $\Gamma \vdash A$ in \mathcal{L} se $\llbracket G_1 \rrbracket_{x_1, \dots, x_i} \cap \dots \cap \llbracket G_\ell \rrbracket_{x_1, \dots, x_i} \subseteq \llbracket A \rrbracket_{x_1, \dots, x_i}$ dove x_1, \dots, x_i sono le variabili libere che compaiono in Γ, A .

B TEOREMA Sia $\mathcal{L} = (\emptyset, \Theta, X)$ un linguaggio (senza segni per operazione) tale che Θ è finito e sia \mathcal{I} un'interpretazione per \mathcal{L} tale che l'insieme U di base per l'interpretazione \mathcal{I} è finito, diciamo $U = \{u_1, \dots, u_i\}$. Sia $\Delta(\mathcal{I})$ la lista che consiste delle formule del linguaggio $\mathcal{L}_U = (\Sigma, \Theta, X \cup U)$

$$\begin{array}{ll} T(u, \dots) & \text{per } (u, \dots) \in \llbracket T \rrbracket \\ \sim W(u', \dots) & \text{per } (u', \dots) \notin \llbracket W \rrbracket \end{array}$$

Sia una f.b.f. A di \mathcal{L} : A è vera nell'interpretazione \mathcal{I} se e solo se il sequente $\Delta(\mathcal{I}) \vdash A$ è un teorema formale di \mathcal{L}_U .

C TEOREMA Sia \mathcal{L} un linguaggio e sia $\Gamma \vdash A$ un sequente in \mathcal{L} .

Correttezza Sia \mathcal{I} un'interpretazione di \mathcal{L} . Se $\Gamma \vdash A$ è un teorema formale del calcolo deduttivo, allora \mathcal{I} è un modello di $\Gamma \vdash A$.

Completezza Se ogni interpretazione \mathcal{I} di \mathcal{L} è un modello di $\Gamma \vdash A$, allora $\Gamma \vdash A$ è un teorema formale del calcolo deduttivo.