Coppa Hilbert

Parma, 22 aprile 2002

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera.
- Se quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
  $\sqrt{2} = 1.4142$ $\sqrt{5} = 2.2361$ $\sqrt{13} = 3.6056$

1. Il pendolare meticoloso Uno studente pendolare ha percorso 10.000 km con la sua auto, avendo cura di alternare le ruote (compresa quella di scorta) in modo che tutte le gomme percorressero lo stesso chilometraggio. Determinare quanti km ha percorso ciascuna gomma.

2. I tre neonati Nel reparto di neonatologia della Clinica Universitaria di Parma sono appena nati tre bambini: Alberto, Alessandra ed Alessandro. I medici vorrebbero sapere il loro peso, ma purtroppo per un malfunzionamento la bilancia elettronica del reparto non mostra pesi inferiori ai 5 Kg. Decidono allora di pesare i bambini a due a due, ottenendo i seguenti risultati: Alberto più Alessandra: 7041 grammi; Alessandra più Alessandro: 6159 grammi; Alessandro più Alberto: 7372 grammi. Determinare il peso di Alberto (in grammi).

3. Sempre più in alto! In deroga a tutte le normative urbanistiche, il comune di Parma ha autorizzato la costruzione di una nuova sede del Dipartimento di Matematica che sarà ospitato in un avveniristico grattacielo a base quadrata, alto 50 metri. Sapendo che la superficie fuori terra del grattacielo (quattro facciate più il terrazzo superiore) sarà di 2321 metri quadri, determinare quale sarà (in metri cubi) il suo volume.

4. Ma che fatica laurearsi! Per laurearsi in matematica con voto finale 66, uno studente ha svolto, in ogni anno della sua carriera universitaria, soltanto 51 esercizi. Un suo amico, che ha avuto voto finale 67, ha svolto ogni anno gli esercizi precedenti, più altri 53. Un terzo studente, che ha aiuto voto finale 68, ha svolto, oltre a quelli necessari per il 67, altri 55 esercizi all'anno. Da questa verifica, empirica, pare assodato che il numero di esercizi annui in più, necessari per guadagnare un punto alla laurea, cresca di due in due, man mano che cresce il punteggio a cui si aspira. Determinare. secondo questa regola, quanti esercizi dovrà fare ogni anno chi punta al 110.

5. Il segreto del successo Secondo una recente statistica, tra i laureati in matematica a Parma, nessuno è diventato miliardario (nemmeno nel senso delle vecchie lire!), ma solo 1 su 14 non ha trovato un posto di lavoro entro due mesi dalla laurea. Detto p il numero, compreso tra 0 e 100, che indica la percentuale di laureati occupati dopo due mesi, determinare la sua cifra delle decine, la sua cifra delle unità, la sua 2002-esima cifra dopo la virgola, la sua miliardesima cifra dopo la virgola. Nella risposta indicare di seguito le quattro cifre richieste.

6. Riciclaggio Per l'anno 2002 Filippo ha ricevuto in regalo due agende. Poich a lui ne serve una sola, ha deciso di conservare l'altra in modo da poterla riutilizzare fra qualche anno, non appena l'agenda tornerà ad indicare in ogni giorno dell'anno il giorno della settimana giusto. Determinare il primo anno in cui Filippo potrà usare l'agenda avanzata.

1. Poiché le gomme di una automobile sono 4, se l'auto ha percorso 10.000km, complessivamente le ruote ne hanno percorso 40.000. Questi 40.000km però sono stati divisi su 5 gomme, dunque ciascuna gomma ha viaggiato per 40.000 : 5 = 8.000km.

2. Indicando A = Alberto , B = Alessandra e C = Alessandro, dalle informazioni otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} A+B = 7041 \\ B+C = 6159 \\ A+C = 7372 \end{cases}$$

Percio' $2A = (A+B)+(A+C)-(B+C) = 7041+7372-6159 = 8254$ e $A = 4127$.

3. Sia x lo spigolo di base del grattacielo. La superficie laterale è $4 \times 50\text{m} \times x$ e la superficie del terrazzo è x^2. Dunque $200x + x^2 = 2321$ da cui si ricava $x = 11$. Così, il volume è $11^2 \cdot 50 = 6050\text{m}^2$.

4. Gli esercizi crescono secondo la regola 51, $51+(51+2)$, $51+(51+2)+(51+2+2)$, $51+(51+2)+(51+2+2)+(51+2+2+2)$, ...,$51 \times k + 2(\frac{1}{2}(k-1)k) = (k+50)k$. I voti da 66 a 110 sono $110 - 66 + 1 = 45$. Gli esercizi da fare sono $95 \times 45 = 4275$.

5. Se 1 su 14 non ha trovato lavoro, allora i $\frac{13}{14}$ lo hanno trovato; quindi

$$p = \frac{13}{14} \cdot 100$$

è la percentuale di persone che hanno trovato lavoro. Ma $\frac{13}{14} = 0,9\overline{285714}$; perciò $p = 92,\overline{857142}$. Cifra decine: 9. Cifra unità: 2. Calcoliamo la sua 2002^{a} e la sua miliardesima cifra dopo la virgola: le cifre periodiche sono 6, quindi il periodo fino alla 2002^{a} si ripete

$$2002 : 6 = 333$$

volte con resto 4. Allora la 2002^{a} cifra è la 4^{a} cifra del periodo, 2002^{a} cifra: 1. Per la miliardesima cifra si calcola ancora il resto di 1 miliardo diviso 6:

$$1.000.000.000 : 6 = 166.666.666$$

con resto 4, ma la 4^{a} cifra del periodo è 1; miliardesima cifra: 1. La risposta è 9211.

6. Scegliamo come punto di riferimento il 1° gennaio del 2002, che cade di martedì e vediamo in quale anno esso cadrà nuovamente di martedì:

2002	03	04	05	06	07	08	09	10	...
L	Ma	Me	V	S	D	L	Me	G	

Tuttavia nel 2008, l'agenda non può essere usata perché tale anno è bisestile, e ha un giorno in più rispetto al 2002. Dunque il 1° anno utile è il 2013.

7. La manifestazione Per protestare contro i ritardi dei docenti a lezione, sono scesi in piazza tutti i 2002 studenti di matematica dell'Università di Parma. Di questi, alcuni (i teorici) si occupano di matematica pura e, vivendo in un mondo ideale, dicono sempre la verità. I rimanenti (gli applicati) si occupano di matematica, applicata e, per adattarsi meglio al mondo reale, mentono sempre. Tutti i teorici si conoscono tra di loro, cos come pure tutti gli applicati si conoscono tra di loro. Tutti i 2002 manifestanti hanno scritto nella loro homepage il numero dei manifestanti applicati che conosco è strettamente maggiore del numero dei manifestanti teorici che conosco. Determinare quanti manifestanti sono teorici.
Si assuma che la conoscenza sia simmetrica (cioè se A conosce B, allora B conosce A); si assuma inoltre che ogni manifestante non includa se stesso tra, le persone che conosce.

8. Il triangolo geometrico In un'aula del Dipartimento di Matematica, un murale illustra il Teorema di Pitagora. Per alimentare il significato simbolico, le lunghezze dei lati del triangolo rettangolo raffigurato sono state scelte in progressione geometrica. Sapendo che il quadrato costruito sul cateto minore ha area 1000cm^2, determinare (in cm^2) l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa.

9. La nazionale Al bar dell'Università alcuni studenti stanno commentando le ultime indiscrezioni sulla nazionale che parteciperà ai prossimi Mondiali di Calcio in Corea e Giappone. Pare che il CT Trapattoni intenda convocare 3 portieri. 8 difensori, 7 centrocampisti e 5 attaccanti. Supponendo che giochi sempre con 1 portiere, 3 difensori. 5 centrocampisti e 2 attaccanti, e che inoltre Nesta, (difensore) e Vieri (attaccanti vengano sempre schierati, determinare quante formazioni diverse può mettere in campo Trapattoni.

10. L'andamento delle iscrizioni Da un'antica cronaca dell'Università di Parma: Due anni fa, il numero degli iscritti era, un quadrato perfetto. L'anno scorso, il numero degli iscritti è cresciuto di 100 unità, diventando un quadrato perfetto aumentato di uno. Quest'anno è cresciuto ancora di 100 unità, diventando nuovamente un quadrato perfetto. Determinare il numero degli studenti iscritti nell'anno a cui risale la cronaca.

11. A tavola non si invecchia Oggi la lezione di Analisi Matematica è terminata regolarmente alle 12:00. Davide ha allora deciso di recarsi presto alla mensa universitaria, in modo da non trovare molta fila. Nel momento in cui si è seduto al tavolo, Davide ha notato che la lancetta delle, ore e quella dei minuti dell'orologio della mensa erano perpendicolari tra di loro. Terminato il pasto, Davide si è alzato dal tavolo, e in quell'istante ha notato che le due lancette erano nuovamente perpendicolari. Alle 13:00, Davide ha raccontato questa strana coincidenza agli amici incontrati al bar. Determinare per quanti secondi Davide è rimasto al tavolo della mensa.

7. Prima osservazione: almeno 1001 teorici sono presenti alla manifestazione.
Infatti: supponiamo che siano meno. Allora l'affermazione sulla homepage è certamente corretta, che contrasta con l'ipotesi fatta che vi siano manifestanti applicati (che dicono il falso).
Seconda osservazione: i teorici non possono essere di più di 1001.
Infatti: fossero 1002, ciascuno dovrebbe conoscere almeno 1003 applicati, ma questi in totale sono al massimo 1000.
Risposta: ci sono tanti teorici quanti applicati, 1001.

8. Visto che i lati sono in progressione geometrica, con il cateto minore $a = 1000\text{cm}^2$, il secondo cateto è $a \cdot b$, l'ipotenusa è $a \cdot b^2$. Per il Teorema di Pitagora,

$$a^2 + a^2 \cdot b^2 = a^2 \cdot b^4.$$

Si ottiene

$$a^2(b^4 - b^2 - 1) = 0$$

che si risolve come una equazione di 2o grado dopo aver posto $b^2 = t$, e si trova $t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. La soluzione negativa è inutile, e si trova

$$b^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Sappiamo che $a^2 = 1000\text{cm}^2$, così l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è

$$(ab^2)^2 = a^2 b^4 = 1000 \cdot (b^2)^2 = 1000(\frac{1 + \sqrt{5}}{2})^2 = 2618\text{cm}^2.$$

9. Per ogni formazione si scelgono 1 portiere, $3 - 1$ difensori, 5 centrocampisti e $2 - 1$ attaccanti. Tenendo conto dei convocati in ogni formazione posso mettere $\binom{3}{1}$ portieri diversi; i difensori in $\binom{8-1}{3-1}$ modi diversi (il -1 a numeratore è dovuto al fatto che Nesta gioca sempre); $\binom{7}{5}$ sono i modi in cui posso mettere i centrocampisti e $\binom{5-1}{2-1}$ sono le possibilità che ho in attacco (ancora, -1 dovuto a Vieri che gioca sempre). Le possibili formazioni sono:

$$\binom{3}{1} \cdot \binom{8-1}{3-1} \cdot \binom{7}{5} \cdot \binom{5-1}{2-1} = 3 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 4 = 441 \cdot 12 = 5292.$$

10. Gli iscritti di due anni prima erano a^2, poi $a^2 + 100 = b^2 + 1$ gli iscritti dell'anno precedente e $a^2 + 200 = c^2$ gli iscritti dell'anno in corso. Tenendo presente che l'espressione del quadrato di un binomio, si vede che $a^2 + 99 = a^2 + 2 \cdot 49 + 1$ e $a^2 + 200 = a^2 + 2 \cdot 2 \cdot 49 + 4$, trovando che c^2 è $51^2 = 2601$. Si può anche andare a tentativi.

11. Siano x e y le posizioni della lancetta dei minuti e delle ore misurate in unità di circonferenza (attenzione: leggiamo gli angoli in senso ***orario***). Per uno spostamento s della lancetta dei minuti, la lancetta delle ore si sposta di $\frac{s}{12}$.
Le condizioni allora si scrivono

$$\begin{cases} y & = & x - 15\text{min} \\ y + \frac{k}{12} & = & x + k - 45\text{min} \end{cases}$$

In altre parole, visto che le posizioni sono chiaramente intorno alle 12:15 e alle 12:45, lo spostamento k della lancetta dei minuti è tale che

$$k - \frac{k}{12} = 30\text{min}$$

da cui $k = \frac{12 \cdot 30\text{min}}{11} = \frac{12 \cdot 30 \cdot 60\text{sec}}{11} = 1963.\overline{63} \approx 1964.$

12. Corsi affollati? Quest'anno p studenti seguono il corso di Analisi Superiore, q studenti seguono il corso di Topologia Algebrica. ed r studenti seguono il corso di Teoria dei Numeri. Sapendo che p, q, r sono numeri primi tali che $rq + p2 = 676$, determinare il prodotto pqr.

13. Il crollo in borsa L'Università di Parma è stata quotata in borsa. In un venerdì nero, le sue azioni hanno aperto (alle 9:00) ad un prezzo fantascientifico: una azione valeva infatti un numero di euro pari al fattoriale di 2002. Purtroppo il prezzo si è andato deteriorando ad un ritmo vertiginoso: infatti, in ogni minuto, il prezzo diventava un numero di euro pari alla somma delle cifre del prezzo nel minuto precedente. Determinare il prezzo di una azione in chiusura della giornata, cioè alle 18:00.

14. La stella L'aula storica dell'Università di Parma ha una stupenda vetrata circolare, decorata con una stella a 49 punte, in rappresentanza dei 49 corsi di laurea attivati. La stella può essere descritta con la seguente costruzione: presi nell'ordine i punti $P_1, P_2, \ldots, P_{49}$ sulla circonferenza della vetrata, non necessariamente equispaziati, la stella si ottiene unendo P_1 con P_3, P_3 con P_5, P_5 con P_7, e così via, fino a ritornare in P_1 (si intende che in questo modo il punto P_{49} sarà unito con P_{47} e P_2). Determinare (in gradi sessagesimali) il minimo valore che può avere la somma, degli angoli della stella con vertici in $P_1, P_2, \ldots, P_{49}$.

15. Forza Giallo Blu! All'ingresso del Tardini. su un muro bianco sono disposti due quadrati di 1 metro di lato, uno fatto di vetro giallo, uno di vetro blu (i colori della, squadra di calcio di Parma). I due quadrati sono incernierati in modo da avere il centro coincidente, ma possono essere ruotati a piacere. Determinare (in cm^2) il minimo valore possibile per l'area della zona che risulta di colore verde.

16. Il codice PIN Per ricordare il PIN del suo telefono cellulare, uno studente di matematica ha osservato che è uguale al numero degli interi positivi di 11 cifre che sono multipli di 2002 e la cui scrittura in base 10 termina. con le cifre 2002. Determinare tale PIN.

17. Il codice PUK Lo stesso studente del problema precedente ha notato che il PUK della sua SIM card è un codice di nove cifre in cui le nove cifre 1, 2,..., 9 compaiono una ed una sola volta. Determinare il massimo valore che può assumere la somma dei sette numeri di tre cifre che si ottengono considerando tutti i blocchi di tre cifre consecutive del PUK.

12. Sapendo che $rq + p^2 = 676$, ottengo $rq = 676 - p^2$, devo quindi cercare p tra i numeri primi minori di 23, visto che $676 = 26^2$ e che non ci sono primi tra 23 e 26. Inoltre $676 - p^2$ deve essere prodotto di due soli primi. Provando con i primi tra 2 e 23, si verifica che deve essere $p = 3$, $q = 23$ e $r = 29$; dunque $prq = 2001$.

13. Per trovare il numero di cifre di 2002!, uso la considerazione, per esempio, che $n! < n^n$. Dunque

$$2002! < 2002^{2002} < 10000^{2002} = 10^{8008},$$

cioè il numero ha sicuramente meno di 8008 cifre. Quindi $2002! < \underbrace{999\ldots9}_{8008 cifre}$. La somma delle cifre di 2002! è minore od uguale a $9 \cdot 8008 = 72072$. Ma la somma delle cifre di 72072 è minore della somma delle cifre di 99999 che è 45. A sua volta, la somma delle cifre di 45 è minore di quella di 99, cioè minore di $9 + 9 = 18$. Dunque dopo 3 minuti il valore delle azioni è al massimo 18 euro. Denotata $s(n)$ la somma delle cifre di n, poichè $9|2002!$, anche $9|s(2002!)$, e pure $9|s(s(2002!))$, quindi anche $9|s(s(s(2002!)))$. Ma $s(s(s(2002!))) \leq 18$, dunque i casi sono due

$$s(s(s(2002!))) = \begin{cases} 9 \\ 18 \end{cases}$$

Comunque, $s(s(s(s(2002!)))) = 9$. Perciò, la somma delle cifre dopo quattro passaggi è sicuramente 9. Poichè $s(9) = 9$, il prezzo non cambia più fino alla chiusura.

14. Tracciamo tutti i raggi vero i punti della stella. Si formano 49 triangoli. La somma dei loro angoli è 49×180. La somma cercata è questa meno due angoli giro: 8100.

15. Per simmetria, l'area minima si trova quando le diagonali di un quadrato sono parallele ai lati dell'altro. In questa situazione, l'area verde è un ottagono regolare di apotema 50cm. Metà lato è $50 \tan(\frac{\pi}{8})$ e l'area è $8 \times 50^2 \tan(\frac{\pi}{8}) = 8 * 50^2 * (\sqrt{2} - 1) \approx 8284$.

16. Un numero x di 11 cifre, divisibile per 2002, le cui ultime 4 cifre (in ordine, migliaia, centinaia, decine, unità) siano 2002 è della forma $x = n \cdot 10000 + 2002$, dove n è un numero di 7 cifre, affinché x abbia esattamente 11 cifre. Dato che x finisce con 2, $2|x$; inoltre, poichè 1001 e 10000 sono primi fra loro, $2002|x \iff 1001|n$. Il minimo n di 7 cifre che sia divisibile per 1001 è ovviamente 1001000; tutti i numeri di 7 cifre divisibili per 1001 sono pertanto tutti e soli della forma: $n = 1001000 + k \cdot 1001 \leq 9999999$. Così $0 \leq k \cdot 1001 \leq 8998999$ e $0 \leq k \leq \left[\frac{8998999}{1001}\right] = 8990$. Dunque in totale i numeri cercati sono 8991, che corrispondono al PIN cercato.

17. 1 è la cifra che vale di meno, dunque cercheremo di usarla il meno possibile nelle somme e ciò avviene ponendolo o come prima cifra o come ultima. Se fosse prima cifra, verrebbe usata come cifra delle centinaia, se fosse ultima come cifra di unità, dunque è meglio usarla solo come cifra dell'unità perchè si perde meno. Analogamente si deve mettere il 2 nella penultima posizione, cosicchè il numero sarà

$$\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ 2\ 1$$

Le cifre minori rimaste sono 3 e 4: per usarle meno volte possibile, le piazziamo nei primi due posti del numero, avendo l'accortezza di porre il 3 come prima cifra, perchè così viene usato solo una volta, mentre se fosse al secondo posto verrebbe usato *anche* come cifra delle decine. Dunque il numero deve essere della forma:

$$3\ 4\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ 2\ 1$$

A questo punto scopriamo che comunque mettiamo le restanti 5 cifre il valore che si ottiene non cambia perchè tutte vengono usate una volta come cifra delle centinaia, una volta come cifra delle decine e una volta come cifra dell'unità: ad esempio, il valore di 345678921 è 4648, che è lo stesso di 349576821.

18. Lo scarso peso della fisica A causa del drastico taglio dei finanziamento, il laboratorio di fisica dispone solo di una bilancia a due piatti e di 6 pesi da, rispettivamente, 1, 3, 9, 27, 81, 243 grammi. Ciascun peso, se utilizzato, può essere indifferentemente piazzato sull'uno o sull'altro piatto della bilancia. Determinare quanti oggetti di peso diverso possono essere pesati con questa apparecchiatura.

19. Gli esagoni nascosti Alla base della torretta della sede centrale dell'Università di Parma c'è una stanza a forma di esagono regolare di 3 metri di lato, pavimentata usando piastrelle a forma di triangolo equilatero di lato 1 metro. Determinare quanti sono gli esagoni regolari i cui vertici sono vertici di qualche piastrella.

20. L'addizione letterale Per la rubrica enigmistica del giornalino universitario di Parma, gli studenti di matematica hanno proposto la seguente addizione cifrata $\texttt{TRE}+\texttt{TRE}+\texttt{DUE} = \texttt{OTTO}$ in cui lettere uguali rappresentano cifre uguali, lettere diverse rappresentano cifre diverse, e nessuna, scrittura decimale inizia con una cifra zero. Determinare la somma del massimo e del minimo valore che può assumere $\texttt{OTTO}$.

18. I pesi disponibili sono: da $1 = 3^0$g, da $3 = 3^1$g, da $9 = 3^2$g, da $27 = 3^3$g, da $81 = 3^4$g, da $243 = 3^5$g. Indichiamo con p il peso dell'oggetto da valutare, così

$$p = 3^5 \cdot x_5 + 3^4 \cdot x_4 + 3^3 \cdot x_3 + 3^2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_0$$

dove x_i è

- 0 se il peso 3^i non viene messo sulla bilancia
- 1 se il peso 3^i viene messo sul piatto dove non c'è l'oggetto
- -1 se il peso 3^i viene messo sul piatto della bilancia dove c'è anche l'oggetto

Dobbiamo capire quali numeri positivi si scrivono in base 3 usando sei cifre tra $0, 1, -1$, invece che 0, 1 e 2. Ma 2 è $1(-1)$, cioè $10-1$ in base 3. Così ogni volta che devo scrivere la cifra 2 basta che scriva $1(-1)$, usando una posizione in più! Si possono fare $1+3+9+27+81+243 = \frac{3^6-1}{3-1} = \frac{729-1}{2} = 364$ pesate diverse.

19. Indico con x una delle parti in cui il vertice variabile del triangolo divide il lato del quadrato, di conseguenza l'altra parte sarà $1\text{km} - x$. Il perimetro minimo si trova perciò ponendo nulla la derivata prima della seguente funzione: $f(x) = \sqrt{1^2 + \frac{1}{2}^2} + \sqrt{\frac{1}{2}^2 + x^2} + \sqrt{1^2 + (1-x)^2}$, che si trova usando il Teorema di Pitagora.

20. Tre addendi di tre cifre ognuno possono dare come massima somma $3 \cdot 999 = 2997$, ma a lettere diverse corrispondono cifre diverse, perciò

$$\texttt{OTTO} < 2997.$$

In particolare, $\texttt{O}$ può valere solo 1 o 2; perciò $\texttt{E}$ deve essere tale che la cifra delle unità di $3 \cdot \texttt{E}$ sia 1 o 2. Dunque $\texttt{E}$ può essere soltanto 7 o 4. Inoltre $\texttt{T}, \texttt{D}, \texttt{O} \neq 0$. Il minimo valore possibile di $\texttt{OTTO}$ è 1221, e si ottiene effettivamente con $\texttt{TRE} = 287$ e $\texttt{DUE} = 647$.

Per il massimo valore di $\texttt{OTTO}$, si potrebbe pensare a $2992 = 2 \cdot \texttt{9R4} + \texttt{DU4}$, che si verifica subito essere impossibile, perché dovrebbe essere $\texttt{D} = 9$ per ottenere

$$29 = 2 \cdot \texttt{T} + \texttt{D} + \text{riporto}$$

come cifre di migliaia e centinaia nella somma, dato che il riporto delle centinaia è al massimo 2. Sfruttando questa osservazione su come ottenere le cifre di migliaia e centinaia nella somma, scopriamo che $\texttt{T}$ non può essere 9. Ma con $\texttt{T} = 8$, è impossibile ottenere somma $28 = 2 \cdot 8 + \texttt{D} + \text{riporto}$. Dunque il massimo valore di $\texttt{OTTO}$ si deve trovare per $\texttt{O} = 1$. Tentando $1881 = 2 \cdot \texttt{8R7} + \texttt{DU7}$, si vede che $\texttt{8R} + \texttt{8R} + \texttt{DU} = 186$, così $\texttt{D}$ è 2 (perchè già $\texttt{O} = 1$) e $\texttt{R} + \texttt{R} + \texttt{U} = 6$, cioè $\texttt{R} = 3$ e $\texttt{U} = 0$. Quindi la risposta è $1221 + 1881 = 3102$.

21. Hai voluto la bici: pedala! Per affrontare il Giro della provincia di Parma, classica di primavera organizzata, dal CUS. Francesco usa una bicicletta da corsa che monta anteriormente tre corone con 53, 39, 30 denti, rispettivamente, e posteriormente sette ruote dentate con 11, 13, 15, 17, 191 21, 23 denti, rispettivamente. Supponendo di aver scritto tutti i rapporti possibili in ordine di lunghezza, dal più lungo (53/11) al più corto (30/23), determinare quello che viene a trovarsi in posizione centrali. Nella risposta si usino le prime due cifre per indicare i denti della corona anteriore e le ultime due cifre per quella posteriore.

22. Il nuovo campus Per fronteggiare il vertiginoso aumento delle iscrizioni. l'Università di Parma sta costruendo un nuovo campus, in un'area quadrata con lato di 1000 metri. Essendo i lavori ancora agli inizi, per ora vi sono solo tre stradine rettilinee. Dall'ingresso principale, posto in un vertice, parte una strada. che arriva fino al Dipartimento di Matematica, il cui ingresso si trova nel punto medio di uno dei due lati opposti rispetto all'ingresso principale. Dal Dipartimento di Matematica parte un'altra stradina che arriva fino alla porta della mensa, posta in un punto dell'altro lato opposto rispetto all'ingresso principale. Dalla mensa parte infine una terza strada che ritorna all'ingresso principale. Determinare (in metri) il minimo valore che può avere la somma delle lunghezze delle tre strade.

23. Ma quanto è difficile copiare Davide, Filippo e Francesco devono sostenere lo scritto dell'esame di Probabilità. Quando arrivano nell'aula si piazzano strategicamente in modo da potersi aiutare. Sfortunatamente per loro, il docente ritiene che l'aula sia troppo affollata e dunque, visto che gli studenti sono in numero pari, decide di dividerli per sorteggio in due gruppi uguali, che sosterranno lo scritto in aule diverse. Francesco, il più preparato dei tre, osserva immediatamente che la probabilità di ritrovarsi nella stessa aula con Filippo e Davide è esattamente un quinto. Determinare quanti studenti si sono presentati alla prova scritta.

24. Il biliardo acuminato Alcuni studenti di matematica di Parma hanno realizzato un videogioco in cui è, stato simulato un biliardo a forma di triangolo isoscele il cui angolo al vertice ha ampiezza di soltanto due primi (un trentesimo di grado!). Una pallina viene lanciata da un estremo della base. Determinare il massimo numero di rimbalzi che la pallina può fare contro le sponde laterali prima di sbattere nuovamente sulla base. Trattandosi di una versione preliminare, la pallina è stata approssimata con un punto.

25. Il giardino delle parabole Gli studenti di matematica di Parma sono soliti ricrearsi nel giardino annesso alle aule. Tale giardino si estende su un quadrato di 100 metri di lato, orientato secondo i punti cardinali, ed è percorso da due sentieri che seguono un andamento parabolico: il primo passa per i due estremi del lato Nord ed ha il vertice nel punto medio del lato Sud, il secondo passa per i due estremi del lato Est ed ha il vertice nel punto medio del lato Ovest. Determinare quanti metri quadri misura l'area del quadrilatero che ha come vertici i quattro punti d'incontro dei due sentieri.

21. Le frazioni sono 21; l'11ª frazione è la soluzione. Si confrontano facilmente

$$\tfrac{30}{23} < \tfrac{30}{21} < \tfrac{30}{19} < \tfrac{30}{17} < \tfrac{30}{15} < \tfrac{30}{13} < \tfrac{30}{11}.$$

$$\tfrac{39}{23} < \tfrac{39}{21} < \tfrac{39}{19} < \tfrac{39}{17} < \tfrac{39}{15} < \tfrac{39}{13} < \tfrac{39}{11}.$$

$$\tfrac{53}{23} < \tfrac{53}{21} < \tfrac{53}{19} < \tfrac{53}{17} < \tfrac{53}{15} < \tfrac{53}{13} < \tfrac{53}{11}.$$

Si trova poi che

$$\tfrac{30}{19} < \tfrac{39}{23} < \tfrac{30}{17} < \tfrac{39}{21} < \tfrac{30}{15} < \tfrac{39}{19} < \tfrac{39}{17} < \tfrac{53}{23} < \tfrac{30}{13}.$$

La risposta è 3013.

22.

23. Sia n il numero di studenti in un gruppo, in totalte sono $2n$. Il numero di possibilità di collocare gli studenti nella 1ª aula sono $\binom{2n}{n}$. Di queste, le possibilità di collocare i tre amici assieme nella 1ª aula è $\binom{2n-3}{n-3}$, l'altra possibilità che gli va bene è che siano tutti assenti dalla 1ª aula, le cui possibili collocazioni sono tante quante le altre $\binom{2n-3}{n} = \binom{2n-3}{n-3}$. La condizione si scrive

$$\frac{1}{5} = \frac{\binom{2n-3}{n} + \binom{2n-3}{n-3}}{\binom{2n}{n}} = \frac{2 \cdot (2n-3)! \cdot n!}{(n-3)! \cdot (2n)!} = \frac{(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-2)}$$

da cui si trova che $n^2 - 9n + 8 = 0$. Le soluzioni sono $n = 1$ e $n = 8$, la seconda è quella che interessa. Sono $2n = 16$ a dare l'esame.

24. Si consideri che un rimbalzo può essere rimpiazzato disegnando un biliardo virtuale simmetricamente al lato di rimbalzo e facendo proseguire la traiettoria nel biliardo virtuale. Supponendo che la pallina continui a rimbalzare sulle sponde laterali, si disegnano tanti triangoli isosceli con il vertice dell'angolo di un trentesimo di grado in comune. Il modo per tracciare una traiettoria che parte da un vertice di base e attraversa il massimo numero di triangoli prima di attraversare la base e quella di completare un semicerchio: $\frac{180}{\frac{1}{30}} = 5400$ triangoli.

25. Immaginiamo il problema su un piano cartesiano, in cui l'unità sia 1dam = 100m: consideriamo il giardino come un quadrato di lato 1 e avente un vertice nell'origine. Sostituendo alcuni punti che vengono forniti dal testo nell'equazione generica della parabola $z = aw^2 + bw + c$, troviamo le equazioni delle due seguenti parabole (una con asse parallelo all'asse delle ascisse, l'altra con asse parallelo all'asse delle ordinate):

$$x = (2y-1)^2 \quad \text{e} \quad y = (2x-1)^2.$$

Mettendole a sistema, troviamo le coordinate dei 4 punti di intersezione:

$$\begin{cases} A = (1,1) \\ B = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{8}, \frac{3-\sqrt{5}}{8}\right) \\ C = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \\ D = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{8}, \frac{3+\sqrt{5}}{8}\right) \end{cases}$$

Per trovare l'area di ABCD devo trovare l'area dei due triangoli $\overset{\triangle}{\mathrm{ABC}}$ e $\overset{\triangle}{\mathrm{CDA}}$, che (per fortuna) sono uguali per cui l'area di ABCD è 2 volte l'area di $\overset{\triangle}{\mathrm{ABC}}$. Noto che sia A che C stanno sulla bisettrice del I e III quadrante e che B e D sono simmetrici rispetto a tale bisettrice. Quindi $\overline{BH} = \frac{\overline{BD}}{2}$. Perciò l'area di ABCD è $\overline{AC} \cdot \overline{BH} = 0.4192\text{dam}^2 = 4192\text{m}^2$.