

## Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera.
- Se quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:  
 $\sqrt{2} = 1.4142$                        $\sqrt{3} = 1.7321$                        $\sqrt{5} = 2.2361$                        $\pi = 3.1416$ .

**1. Una torta per cinque** Stefano ed i suoi 4 fratelli compiono tutti gli anni il 18 marzo, ma sono nati tutti in anni diversi. Moltiplicando tra di loro i 4 numeri che rappresentano le differenze d'età (intese sempre come positive) tra Stefano ed i suoi fratelli si ottiene 25. Sapendo che Stefano è nato nel 1986, determinare la somma dei 5 anni in cui sono nati Stefano ed i suoi 4 fratelli.

**2. Il gioco delle tre carte** Le 3 carte J, Q, K vengono messe a caso in 3 scatole numerate con 1, 2, 3 (una per scatola). Successivamente le 3 scatole vengono poste a caso di fronte ad un osservatore. Si sa che

- la scatola numero 2 sta a sinistra della scatola numero 3;
- la carta Q sta a sinistra della carta J;
- la scatola 1 sta a destra della carta K;
- la carta J non sta nella scatola 1.

Determinare la disposizione delle scatole e delle carte al loro interno.

Con "sta a sinistra" *non* si intende "sta esattamente a sinistra", e analogamente per la destra. Nella risposta indicare, da sinistra verso destra: il numero della scatola a sinistra, il numero della scatola centrale, il numero della scatola che contiene la carta J, il numero della scatola che contiene la carta Q.

**3. Cancella il debito** Secondo gli ultimi dati, per pagare i debiti contratti dagli organizzatori di questa gara, ciascuno dei 56 milioni di abitanti del nostro paese dovrebbe sborsare 9 mila euro. Un ricchissimo straniero si è offerto di coprire da solo questa stratosferica cifra, pagando in contanti con una pila di banconote da 10 dollari. Il ricco finanziatore fonderà poi un Ente, che curerà, negli anni a venire, la manifestazione. Sapendo che al cambio attuale un dollaro vale 80 centesimi di euro, e che una pila di 100 banconote da 10 dollari è alta un centimetro e mezzo, determinare quanti km dovrà essere alta la pila del misterioso benefattore.

**4. Un terreno additivo** Per costruire la sua futura sede, l'Ente ha acquistato un terreno la cui forma, vista dall'alto, ricorda un simbolo + ottenuto affiancando opportunamente 5 quadrati uguali, il cui lato misura un numero intero di metri. L'area del terreno è superiore a  $5500\text{m}^2$ , ma inferiore a  $6000\text{m}^2$ . Determinare la lunghezza in metri del perimetro del terreno.

**1.** Il prodotto si può ottenere così  $25 = 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1$  oppure così  $25 = 25 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ . Dato che le età sono tutte diverse, il secondo modo non va bene. Dunque Stefano a due fratelli maggiori di un anno e di 5 anni, rispettivamente, come pure due fratelli minori di un anno e di 5 anni. La somma degli anni di nascita è 9930.

**2.** Visto che la scatola 1 sta a destra di un'altra scatola, non è la più a sinistra. Ma la scatola 2 sta a sinistra della scatola 3, così la scatola 2 è la più a sinistra. Così pure, le carte Q e K stanno a sinistra di qualche carta, perciò non stanno nella scatola più a destra. In quella ci sta la carta J. Dunque la scatola 1 non è a destra. La carta K sta nella scatola 2. La risposta è 2131.

**3.** altezza della pila =

$$= \frac{\text{abitanti} \times \text{debito}}{\text{cambio } \text{€}/\$} \times \frac{1}{\text{blocco in } \$} \times \text{alt. blocco}$$

$$= \frac{5.6 \times 10^6 \times 9 \times 10^3}{0.8} \times \frac{1}{10^3} \times 1.5 \times 10^{-5} \text{km}$$

$$= 9450 \text{km.}$$

**4.** Sia  $\ell$  la misura di uno dei lati dei quadrati. L'area è  $5\ell^2$ . Dunque  $1100 < \ell < 1250$ . E'  $33^2 = 1089$ ,  $34^2 = 1156$  e  $35^2 = 1225$ . Il lato è 34m e il perimetro è  $3 \times 4 \times \ell = 408\text{m}$ .

**5. Burocrazia** Ben presto la burocrazia si è impadronita dell'Ente, al punto che sono stati assunti 2 impiegati il cui unico compito è di timbrare una montagna di buste! Il primo arriva in ufficio alle 9:00 ed inizia il suo lavoro, al ritmo di 30 buste ogni 2 minuti. Il secondo arriva un'ora dopo, ed inizia anche lui a timbrare, al ritmo di 50 buste ogni 3 minuti. Lavorando senza pause, il primo impiegato termina il suo lavoro alle 13:00. Anche il secondo lavoratore non fa pause, ed ha lo stesso numero di buste da timbrare del primo.

Determinare a che ora finirà il secondo impiegato.

Nella risposta si utilizzino le 2 cifre a sinistra per indicare le ore (nel formato da 00 a 23) e le rimanenti per indicare i minuti.

**6. Combinazione geometrica** La liquidità dell'Ente è custodita in una cassaforte a muro che ha una manopola a forma di pentagono regolare. Il centro del pentagono è unito con i vertici, in modo da suddividere idealmente la manopola in 5 triangoli, di cui 4 argentati e uno dorato. Quando la cassaforte è chiusa, la manopola deve essere disposta in modo tale da avere il triangolo dorato in basso, con la base orizzontale. Per aprire la cassaforte, occorre ruotare la manopola in senso antiorario per meno di un giro, finché il pentagono non apparirà con un lato in alto disposto orizzontalmente, ed il triangolo dorato a sinistra nella parte alta.

Determinare di quanti gradi occorre ruotare la manopola per aprire la cassaforte.

**7. Siamo sempre di più** Alla prima edizione di questa gara a squadre, svoltasi il 2 Aprile 2003, hanno assistito 57 spettatori, la somma delle cui età era curiosamente 2003. L'edizione successiva, svoltasi il 2 Aprile 2004, è stata seguita da 63 spettatori, in tutto o in parte diversi dai precedenti, la somma delle cui età era curiosamente 2004.

Quest'anno si prevede che ci saranno nel pubblico tutti e soli quelli che hanno assistito ad almeno una delle edizioni precedenti.

Determinare quanto potrà valere, al massimo, la somma delle età degli spettatori presenti quest'anno.

**8. Un cliente esigente** Nella mensa dell'Ente, il cuoco non ha a disposizione orologi o timer, ma solo due clessidre da 7 e 4 minuti, rispettivamente, le quali possono essere girate solo quando la sabbia è passata tutta dalla stessa parte. Il Grande Capo arriva alle 7:55, e per colazione ordina un uovo cotto esattamente 9 minuti. Alle 7:56, il cuoco inizia a lavorare (gli orari sono quelli indicati dall'orologio del Capo, che ovviamente il cuoco non può consultare).

Supponendo che il cuoco gestisca al meglio le sue risorse, determinare a che ora sarà pronto l'uovo.

Nella risposta si utilizzino le 2 cifre a sinistra per indicare le ore (nel formato da 00 a 23) e le rimanenti per indicare i minuti.

**9. Lo specchio ... dimagrisce** Un numero di 4 cifre si dice maggiore del proprio simmetrico se non è divisibile per 10 ed è strettamente maggiore del numero che si ottiene leggendo le sue cifre da destra verso sinistra. Ad esempio, 6752 è maggiore del suo simmetrico (in quanto  $6752 > 2576$ ), mentre 3546 e 3850 non lo sono.

Determinare quanti sono i numeri di 4 cifre che sono maggiori del proprio simmetrico.

**10. La cena sociale** Roberto, il capitano della sua squadra, ha organizzato una cena con gli altri 6 titolari e le 2 riserve, e per questo ha prenotato un tavolo per 9 persone: un posto a capotavola e 4 posti su ciascuno dei lati lunghi. Giunto per primo al ristorante, Roberto siede ovviamente a capotavola. Man mano che arrivano, gli altri siedono attorno a lui: i primi due si siedono ai suoi lati e, via via, gli altri si dispongono in modo da stare il più vicino possibile a Roberto. Sapendo che Daniela (il consegnatore) arriva sempre subito dopo Roberto, mentre Ilaria e Pierluigi (le due riserve) arrivano sempre per ultimi, determinare in quanti modi diversi possono sedersi Roberto e i suoi amici attorno al tavolo.

**5. Il secondo impiega**

$$(240\text{min} \cdot \frac{30}{2}) \cdot 350 = 216\text{min}.$$

Finisce alle 13.36.

**6. Mezzo giro porta il triangolo dorato con la base rivolta verso l'alto, si deve girare ancora per  $\frac{360^\circ}{5}$ ; in totale,  $252^\circ$ .**

**7. Il caso massimo avviene se gli spettatori di un anno non hanno assistito all'altra gara. Così la somma delle loro età quest'anno sarà**

$$2003 + 2 \times 57 + 2004 + 63 = 4184.$$

**8. Per ottenere un tempo di nove minuti, basta calcolare un minuto oltre a due clessidre da quattro minuti. Si girano insieme le due clessidre; quando quella da 4 minuti finisce, la si gira; quando quella da 7 minuti finisce, si getta l'uovo e poi si girano ancora due volte quella da 4 minuti. In totale, sono quattro volte la clessidra da quattro minuti. L'uovo è pronto alle 08.12.**

**9. I numeri di quattro cifre sono  $9999 - 999 = 9000$ . I multipli di dieci sono tanti quanti i numeri da 100 a 999, cioè 900. I numeri di quattro cifre palindromi *abba* sono novanta perché *a* deve essere diversa da 0. Le altre sono coppie di simmetrici, esattamente uno dei due è maggiore del suo simmetrico. Sono  $\frac{9000 - 900 - 90}{2} = 4005$ .**

**10. Daniela sceglie dove sedersi in uno di due modi, dei successivi cinque conta soltanto l'ordine in cui si presentano (non importa da che parte del tavolo siedono), gli ultimi due (che sono sempre gli stessi) hanno due modi per sedere: in totale,  $2 \cdot 5! \cdot 2 = 480$ .**

**11. Trekking** Un turista ha affrontato una salita in montagna, tornando poi a valle per un sentiero diverso, più lungo di 6 km. Sia la salita sia la discesa sono durate esattamente 3 ore. Il turista ha tenuto un'andatura costante sia all'andata, sia al ritorno, ma al ritorno ogni km è stato percorso in 8 minuti in meno rispetto all'andata.

Determinare la lunghezza in metri del percorso in salita.

**12. Inviti golosi** La gara a squadre dell'anno scorso si è conclusa con una grande festa. Il numero delle ragazze partecipanti è stato maggiore di quello dei ragazzi, ma minore di una volta e mezzo il numero dei ragazzi. All'inizio, per rompere il ghiaccio, ogni ragazza ha regalato un cioccolatino ad ogni ragazzo che lei conosceva, poi ogni ragazzo ha regalato un cioccolatino ad ogni ragazza che lui non conosceva. Chiunque ha ricevuto dei cioccolatini li ha mangiati immediatamente.

Sapendo che in tutto sono stati mangiati 5005 cioccolatini, determinare quante ragazze e quanti ragazzi hanno partecipato alla festa.

Si supponga che la conoscenza sia simmetrica, cioè che se A conosce B, allora B conosce A. Nella risposta si usino le 2 cifre di sinistra per indicare il numero di ragazze e le 2 cifre di destra per indicare il numero di ragazzi.

**13. I satelliti** Per trasmettere in mondovisione le gare, l'Ente ha lanciato 2 satelliti, che ora ruotano intorno alla terra seguendo, nello stesso verso, 2 orbite circolari complanari di raggio differente. Il primo satellite impiega 3 ore e 50 minuti per compiere una rivoluzione completa, il secondo impiega 4 ore e 15 minuti. Al centro di controllo osservano che, allo scoccare della mezzanotte di un certo giorno, i 2 satelliti si trovano alla minima distanza l'uno dall'altro.

Determinare a che ora si troveranno per la prima volta alla massima distanza (tutti gli orari sono riferiti al fuso orario del centro di controllo).

Nella risposta si utilizzino le 2 cifre a sinistra per indicare le ore (nel formato da 00 a 23) e le rimanenti per indicare i minuti.

**14. Chi sbaglia paga** Il nuovo capo dell'Ente ha voluto far rifare il rivestimento del salone della vecchia sede. Si tratta di una stanza quadrata di 20 metri di lato, che doveva essere pavimentata con piastrelle quadrate bianche e nere, la cui diagonale misura 30 cm. Le piastrelle andavano disposte a scacchiera e in diagonale (a  $45^\circ$ ) rispetto alle pareti, in modo che il centro della stanza fosse il vertice di 4 piastrelle. Poiché le piastrelle nere sono risultate estremamente difficili da tagliare, la ditta esecutrice ha deciso di sostituire le piastrelle nere che avrebbero dovuto essere tagliate, con delle piastrelle rosse. Alla fine dei lavori, il Grande Capo ha giudicato il risultato antiestetico e, dopo un lungo contenzioso legale, la ditta è stata condannata a pagare una penale di 10 centesimi di euro per ogni centimetro quadrato di piastrella rossa presente sul pavimento.

Determinare a quanti euro ammonta la penale.

**15. Square Boulevard** Le autorità hanno deciso di rinnovare la pavimentazione del grande boulevard che conduce alla futura sede dell'Ente, arricchendola con un particolare motivo ornamentale, così composto: prima un quadrato di 1 cm di lato, poi proseguendo uno di 2 cm di lato, quindi uno di 3 cm di lato, e così via fino all'ultimo quadrato, il cui lato sarà di ben 10 metri. I quadrati dovranno essere tutti di colori diversi, e ciascuno dovrà essere composto a mosaico, usando tessere quadrate dello stesso colore di 1 cm di lato. Purtroppo le tessere dei vari colori, molto preziose, vengono vendute in confezioni da 9, per cui, anche gestendo bene gli acquisti, alla fine parecchie tessere avanzeranno.

Determinare il minimo numero di tessere che resteranno inutilizzate.

**11.** Sia  $s$  la lunghezza della salita in km. I minuti per fare un chilometro in salita sono  $\frac{180}{s}$ , quelli per farne uno in discesa sono  $\frac{180}{s+6}$  e questi sono 8 in meno dei precedenti. Dunque  $\frac{180}{s+6} = \frac{180-8s}{s}$ . Perciò  $s^2 + 6s - 135 = 0$  che ha come soluzioni 9 e  $-15$ . La lunghezza della salita è di 9000m.

**12.** Siano  $m$  e  $n$  i numeri di ragazzi e ragazze. Contiamo quanti cioccolatini ha scambiato (cioè dato o ricevuto) una ragazza: ne ha dati uno a ciascun ragazzo che conosce e ne ha ricevuto uno da ogni ragazzo che non conosce. In altre parole ha scambiati tanti quanti sono i ragazzi. La somma di tutti i cioccolatini è dunque il prodotto di  $m$  e  $n$ , perciò  $m \times n = 5005 = 5 \times 7 \times 11 \times 13$ . Viste le condizioni sui due numeri, i ragazzi sono 65, le ragazze 77.

**13.** La massima distanza si otterrà quando il satellite interno sarà dove era nel momento di distanza minima, mentre quello esterno sarà a metà della propria orbita. E' dunque necessario che, dal momento di distanza minima, il satellite interno sia al completamento della sua orbita, mentre quello esterno raggiunge il punto opposto: in altre parole, si deve trovare il primo numero della forma  $255 \times k + 127.5$  è multiplo di 230

**14.** Da centro della stanza una mezza fila ha  $[1000/30] = 33$  piastrelle bianche o nere non tagliate, la fila intera ne ha 66. La fila a fianco di questa ne ha una di meno:  $2 \times [(1000 - 15)/30] + 1 = 65$ . L'area totale coperta dalle piastrelle a scacchiera complete è  $\frac{30^2}{2} \cdot 65 \cdot 66 = 1930500\text{cm}^2$ . L'area della stanza è di  $4000000\text{cm}^2$ . L'area ricoperta di piastrelle rosse è  $(4000000 - 1930500)/2 = 69500\text{cm}^2$ . La penale è di 6950€.

**15.** Per ciascun colore, le tessere usate sono un quadrato perfetto: 1 per il primo, 4 per il secondo, 9 per il terzo, 16 per il quarto, ..., 1000000 per l'ultimo. Per ciascun colore, le tessere usate dall'ultima confezione sono il resto della divisione per 9 delle tessere necessarie (che, come nella prova del nove, è la somma delle cifre del numero): 1 per il primo, 4 per il secondo, 0 per il terzo, 7 per il quarto, ..., 1 per l'ultimo. Queste si ripetono identiche ogni nove quadrati. Perciò le tessere rimanenti sono:

8 5 0 2 2 0 5 8 0 8 5 0 2 ...

Ogni nove quadrati rimangono 30 tessere; dato che  $1000 = 9 \cdot 111 + 1$ , da 1 a 1000 ne restano  $30 \cdot 111 + 8 = 3338$ .

**16. Le radio-boe 1** Per migliorare le comunicazioni con i satelliti lanciati, l'Ente deve posizionare tre radio-boe vicino ad un faro su un'isoletta. La prima deve stare, rispetto al faro, 3 km a est e 4 km a nord, la seconda 1900 metri a est e 2 km a sud, sempre rispetto al faro. Per permettere certi tipi di rice-trasmissione, la terza boa deve essere disposta in modo tale che le 3 boe siano i vertici di un triangolo isoscele. Tenendo conto di questi vincoli, i tecnici iniziano a discutere di quale sia la posizione migliore per la terza boa.

“Secondo me andrebbe piazzata sulla linea dei punti che stanno 1 km ad est del faro”, osserva il primo tecnico.

“Basterà questa condizione per determinare univocamente la posizione della terza boa?”, si chiede un suo collega, dai trascorsi matematici.

Determinare quante sono le posizioni compatibili con queste informazioni.

**17. Equidistribuzione** Tre rette tracciate opportunamente dividono un cerchio in 7 regioni. Si vuole ora piazzare in ogni regione un intero tra 1 e 7, in modo da usarli tutti una e una sola volta, ed in modo che per ogni retta la somma dei numeri nei due semipiani da essa delimitati sia la stessa. Determinare quali interi possono venirsi a trovare nel triangolo centrale.

Nella risposta indicare tali interi, da sinistra verso destra, in ordine crescente. Se sono più di 4, indicare solo i 4 più piccoli; se sono meno di 4, completare le caselle rimanenti a destra con degli zeri.

**18. Parva sed apta mihi** Nell'archivio dell'Ente, un ragno ha trovato una scatola cubica di 60 cm di lato, aperta nella parte superiore, e l'ha eletta come sua dimora. Successivamente ha scelto uno dei vertici della base inferiore, decidendo che lì si ritirerà per riposare. Per avere un ambiente più riservato, ha quindi costruito una tela triangolare unendo gli altri estremi dei 3 spigoli del cubo che partono dal suo vertice favorito. Infine, ha tessuto un filo rettilineo che parte dal suo vertice favorito e, attraversando la tela, arriva fino al vertice opposto della base superiore, percorrendo quindi tutta una diagonale interna del cubo.

Determinare la lunghezza in millimetri della parte di filo compresa tra il vertice favorito del ragno e la tela.

**19. Scansafatiche ... aleatori** Per risparmiare tempo, un docente universitario, impegnato attivamente nella gestione delle gare a squadre, fa degli esami molto sommari. Egli pone allo studente una domanda la cui risposta può essere solo “Vero” o “Falso”: se lo studente risponde esattamente, ha superato l'esame, altrimenti no. Tre amici, per risparmiare tempo pure loro, decidono di presentarsi al primo appello completamente impreparati, provando a rispondere a caso; quelli che non passeranno, torneranno al secondo appello a ritentare la sorte, e così via.

Determinare la probabilità che almeno uno dei tre amici debba presentarsi al quarto appello.

Espressa la probabilità come frazione  $m/n$  irriducibile, indicare nella risposta  $m+n$ .

**20. E chi lo ferma più!** Un grande plotter è stato programmato per eseguire un disegno su un enorme foglio di carta: partendo da un punto prefissato, la puntina si muove di un metro verso destra, poi di 50 cm verso l'alto, poi di 25 cm verso sinistra, quindi di 12.5 cm verso il basso. Poi continua ad andare alternativamente verso destra, in alto, verso sinistra, ed in basso, dimezzando ogni volta la lunghezza del tratto tracciato. Per un difetto del software, il plotter non si ferma più.

Determinare, alla lunga, a quanti millimetri di distanza dal punto iniziale verrà a trovarsi la puntina.

**16.** I triangoli isosceli sono al massimo cinque: due con vertice nella prima boa, due con vertice nella seconda boa, uno con base il segmento tra le due boe. Bisogna verificare se le due coppie di triangoli con vertice in una stessa boa sono diversi (cioè la circonferenza con centro una boa e raggio la distanza tra le due è tangente o meno alla retta con direzione nord-sud che passa ad un chilometro a est del faro) e se due triangoli di tipo diverso sono uguali (nel qual caso tutti i triangoli sono equilateri e uguali). Basta considerare le coordinate geografiche come coordinate cartesiane per stabilire che i cinque triangoli sono effettivamente diversi.

**17.** Dato che  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ , la somma dei numeri nelle quattro regioni di un semipiano può essere ottenuta come  $1 + 2 + 4 + 7$ ,  $1 + 2 + 5 + 6$ ,  $1 + 3 + 4 + 6$  o  $2 + 3 + 4 + 5$ . Dato che i semipiani con quattro regioni sono tre (uno per ognuna delle tre rette), i numeri che possono essere usati nella regione centrale sono quelli che compaiono in tre delle somme precedenti: 1, 2 3 4.

**18.** La tela è un triangolo equilatero e il filo tra i due vertici passa per il baricentro del triangolo, dunque è perpendicolare al triangolo ed è l'altezza del tetraedro relativa alla tela come base. Il volume del tetraedro è un sesto del volume del cubo. Dunque il filo è lungo

$$\frac{\frac{1}{6}600^3}{\frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{4} (\frac{\sqrt{2}}{2}600)^2} = 200 \cdot \sqrt{3} = 346.$$

**19.** Uno studente riesce a superare l'esame prima del quarto appello se azzecca la risposta la prima volta, oppure non ci riesce la prima volta e l'azzecca al secondo tentativo, oppure ancora non ci riesce nessuna delle prime due volte, ma l'azzecca al terzo tentativo. Ogni situazione esclude le altre, dunque la probabilità che uno studente riesca a superare l'esame prima del quarto appello è  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$ . La probabilità che questo capiti a tre amici è  $\frac{7}{8}^3$ . Perciò la probabilità che uno dei tre non sia ancora riuscito a superare l'esame è  $1 - \frac{7}{8}^3 = \frac{64+56+49}{2^9} = \frac{13^2}{2^9}$ . La risposta è  $13^2 + 2^9 = 169 + 512 = 681$ .

**20.** Conviene calcolare lo spostamento della puntina dal punto d'inizio ogni coppia di mosse, una orizzontale, una verticale: dato che la successione si sviluppa a partire dal dato iniziale sempre dimezzando un valore, scriviamo  $a$  al posto di  $1m$  e  $k$  al posto di  $1/2$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + (ka)^2} &= a\sqrt{1 + k^2} \\ \sqrt{(a - k^2a)^2 + (ka - k^3a)^2} &= (1 - k^2)a\sqrt{1 + k^2} \\ \sqrt{(a - k^2a + k^4a)^2 + (ka - k^3a + k^5a)^2} &= \\ &= (1 - k^2 + k^4)a\sqrt{1 + k^2} \\ &\vdots \\ \sqrt{(a + \dots + (-1)^n k^{2n}a)^2 + (ka + \dots + (-1)^n k^{2n+1}a)^2} &= \\ &= (1 + \dots + (-1)^n k^{2n})a\sqrt{1 + k^2} \end{aligned}$$

Lo spostamento dopo  $2n$  mosse è

$$[1 - (-1)^n k^{2(n+1)}] \frac{a}{\sqrt{1 + k^2}} :$$

nel caso considerato,  $[1 - \frac{(-1)^n}{2^{2(n+1)}}] \frac{2000}{\sqrt{5}}$  Visto che  $\frac{2000}{2.2361} = 894.41$ , basta trovare un numero  $n$  tale che  $\frac{894.41}{2^{2(n+1)}} < .4$ , cioè  $2472 < \cdot 2^{2(n+1)}$ : questo è ovvio, ad esempio  $n = 5$ . La risposta è 894.

**21. Sprechen Sie Deutsch?** Tra i partecipanti alle gare a squadre di quest'anno, quelli che studiano tedesco sono strettamente meno di un terzo, ma strettamente più del 33,3%.

In base a questa condizione, determinare quanti studenti partecipano, come minimo, alle gare a squadre di quest'anno.

**22. Queste stampanti!** Il grande capo ha stabilito che il budget a disposizione dell'Ente sarà un numero di euro pari a  $34!$ , cioè il prodotto di tutti gli interi tra 1 e 34. Un socio esegue il calcolo con l'aiuto di un computer ed ottiene il seguente stampato

$$34! = 295\ 232\ 799 * *9\ 604\ 140\ 847\ 618\ 609\ 643\ 5 * *000\ 000.$$

Purtroppo, come si può vedere, la stampante ha sostituito 4 delle cifre con degli asterischi.

Determinare le cifre mancanti.

Nella risposta scrivere le quattro cifre mancanti nello stesso ordine in cui dovrebbero comparire nello stampato.

**23. Le radio-boe 2** La discussione tra i tecnici che dovevano piazzare le radio-boe in un problema precedente è durata ancora parecchio. Alla fine è stata abbandonata l'idea di piazzare la terza boa sulla linea dei punti che stanno ad 1 km ad est del faro, e si è deciso invece di piazzare la boa il più vicino possibile al faro, compatibilmente con gli altri vincoli. "Ora vi è di sicuro un solo punto possibile", conferma il tecnico-matematico.

Determinare a quanti metri di distanza dal faro sarà piazzata la terza boa.

**24. Compensi (da) mediani** Ora che le gare a squadre sono gestite da un ricco Ente, finalmente tutti i collaboratori riceveranno lauti compensi. L'ammontare in euro dei vari compensi saranno tutti numeri mediani di 4 cifre. In base alla definizione data dal Grande Capo, un numero di 4 cifre si dice mediano se le sue cifre non sono in progressione aritmetica, ma il numero costituito dalle sue 2 cifre centrali è la media aritmetica di quello costituito dalle due cifre iniziali e di quello costituito dalle 2 cifre finali. Così, per esempio, 3581 è un numero mediano (infatti  $(35 + 81)/2 = 58$ ), mentre 3333, 3579 o 6420 non lo sono, in quanto le loro cifre sono in progressione aritmetica.

Il compenso più alto spetta ovviamente al Grande Capo; un po' meno prendono i tecnici delle radio-boe (tutti compensati con la stessa cifra); meno ancora i 2 impiegati che devono timbrare le buste (anche loro pagati ugualmente); e ancora meno il cuoco della mensa, accusato di metterci troppo tempo per cuocere un semplice uovo.

Determinare a quanto ammonterà, al massimo, il compenso del cuoco.

**21.** Sia  $m$  il numero di studenti che studiano tedesco e sia  $n$  il numero totale dei partecipanti. Devono essere tali che

$$\frac{333}{1000} < \frac{m}{n} < \frac{1}{3}$$

cioè  $333n < 1000m$  e  $3m < n$ . Almeno deve essere  $n = 3m + 1$ . Perciò  $999m + 333 < 1000m$ , cioè  $m > 333$ . Almeno  $m = 334$  e  $n = 1003$ .

**22.** La cifra mancante più a destra è 0 dato che ci sono sette fattori 2 e 5 contenuti nei fattori 5, 8, 10, 15, 20, 25, 30 di  $34!$  che dunque contiene una potenza  $10^7$ . Per determinare ora la cifra precedente, si calcola il prodotto  $\frac{34!}{10^7}$  modulo 10:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 1 \cdot \\ & 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 1 \cdot \\ & 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 1 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 3 \cdot 31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 = \\ & = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \\ & \quad 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 2 \end{aligned}$$

Infine per determinare le due cifre mancanti  $a, b$  più a sinistra si calcola il fattoriale modulo 9 e modulo 11: si ottengono le condizioni  $a + b - 3 = 0 \pmod{9}$  e  $b - a - 3 = 0 \pmod{11}$ , cioè  $a + b$  è 3 o 12 e  $b - a$  è 3 o  $-8$ . Le uniche cifre che verificano la condizione trovata sono  $a = 0$  e  $b = 3$ . La risposta è 0320.

**23.** La condizione di minima distanza è verificata per uno di quei triangoli isosceli in cui il faro sta su uno dei lati. I casi da verificare sono chiaramente due: il faro sta sulla base tracciata dalla boa più vicina delle due, oppure il faro sul lato obliquo tracciato dalla boa più lontana. Nel secondo caso la terza boa è a una distanza dal faro di  $\sqrt{(3000 - 1900)^2 + (4000 + 2000)^2} - \sqrt{3000^2 + 4000^2} = 6100 - 5000 = 1100$  e si controlla che nel primo caso si trova una distanza maggiore.

**24.** La condizione di numero mediano comporta che, se le quattro cifre del numero sono  $a, b, c, d$  (in ordine dalle migliaia alle unità), allora  $10(a - b) - 9(b - c) = c - d$ . E' facile vedere che cifre in progressione aritmetica verificano la condizione e trovare le altre possibilità. La tabella dei possibili valori delle tre differenze è qui sotto insieme con altre, derivabili da queste, utili per determinare i numeri mediani maggiori.

$b - c$	$c - d$	$a - b$	$a - c$	$a - d$	
5	-5	4	9		9505
-1	9	0		8	8890
4	-6	3	7		9628, 8517, 7406
-2	8	-1		5	6791, 5680
-3	7	-2	-5		4692, 3581, 2470
-4	6	-3	-7		2593, 1482
3	-7	2	5		7529, 6418, 5307
2	-8	1		-5	4319, 3208
1	-9	0			1109

La risposta è 8517.