La codifica dell'informazione

(continua)

Codifica dei numeri

- Il codice ASCII consente di codificare le cifre decimali da "0" a "9" fornendo in questo modo un metodo per la rappresentazione dei numeri
- Il numero 324 potrebbe essere rappresentato dalla sequenza di byte: 00110011 00110010 00110100

  3 2 4
- Questa rappresentazione non è efficiente e, soprattutto, non è adatta per eseguire le operazioni aritmetiche sui numeri

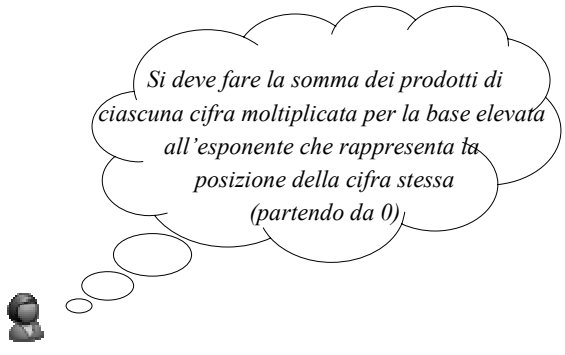
Codifica dei numeri

- Sono stati pertanto studiati codici alternativi per
  - rappresentare i numeri in modo efficiente
  - eseguire le usuali operazioni

Codifica dei numeri: il sistema decimale

- Sistema **posizionale** in cui ogni cifra di un numero assume un valore che dipende dalla sua posizione

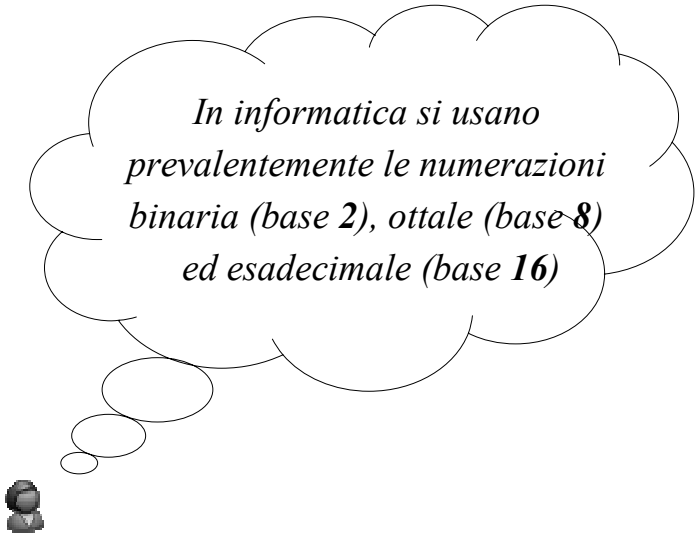
$$365 = \mathbf{3} \times 100 + \mathbf{6} \times 10 + \mathbf{5} \times 1$$
$$365 = \mathbf{3} \times 10^{\mathbf{2}} + \mathbf{6} \times 10^{\mathbf{1}} + \mathbf{5} \times 10^{\mathbf{0}}$$



Codifica dei numeri

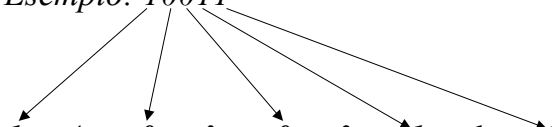
- La notazione posizionale può essere usata con qualunque **base** creando così sistemi di numerazione diversi
- Per ogni sistema di numerazione si usa un numero di cifre uguale alla base
- *Esempi*
  1. *Nella base 10 si usano le cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9*
  2. *In base 5 si usano le cifre 0, 1, 2, 3, 4*
  3. *In base 3 si usano le cifre 0, 1, 2*

Codifica dei numeri



Sistema binario

- Utilizza una notazione posizionale basata su 2 cifre (0 e 1) e sulle potenze di **2**
- *Esempio: 10011 =*

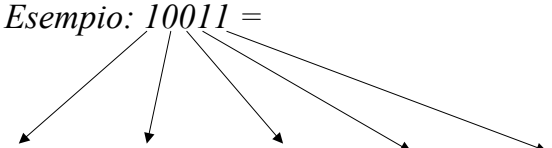


$$\mathbf{1} \times 2^4 + \mathbf{0} \times 2^3 + \mathbf{0} \times 2^2 + \mathbf{1} \times 2^1 + \mathbf{1} \times 2^0 = \mathbf{19}$$

- *Esempio: 20011 = ????*

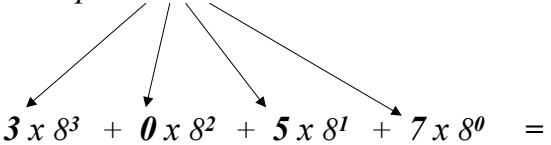
Sistema ottale

- Utilizza una notazione posizionale basata su 8 cifre (0,1, …, 7) e sulle potenze di **8**
- *Esempio: 10011 =*



$$\mathbf{1} \times 8^4 + \mathbf{0} \times 8^3 + \mathbf{0} \times 8^2 + \mathbf{1} \times 8^1 + \mathbf{1} \times 8^0 = \mathbf{4105}$$

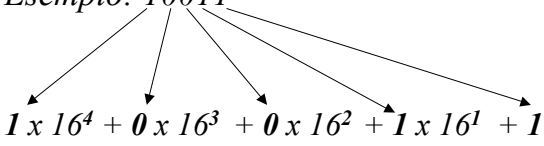
- *Esempio: 3057 =*



$$\mathbf{3} \times 8^3 + \mathbf{0} \times 8^2 + \mathbf{5} \times 8^1 + 7 \times 8^0 = \mathbf{1583}$$

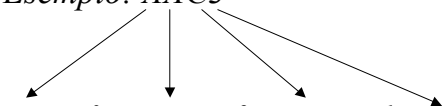
Sistema esadecimale

- Utilizza una notazione posizionale basata su 16 cifre (0,1,2,…,9,A,B,C,D,E,F) e sulle potenze di **16**
- *Esempio: 10011 =*



$$\mathbf{1} \times 16^4 + \mathbf{0} \times 16^3 + \mathbf{0} \times 16^2 + \mathbf{1} \times 16^1 + \mathbf{1} \times 16^0 = \mathbf{65553}$$

- *Esempio: AAC3 =*



$$\mathbf{10} \times 16^3 + \mathbf{10} \times 16^2 + \mathbf{12} \times 16^1 + \mathbf{3} \times 16^0 = \mathbf{43715}$$

Sistemi di numerazione

- Per evitare ambiguità si può scrivere esplicitamente la base di un numero
- Avremo

$$10011_{\mathbf{2}} < 10011_{\mathbf{8}} < 10011_{\mathbf{10}} < 10011_{\mathbf{16}}$$

Conversione da base 10 a base 2

- Per convertire un numero M in base 2 si devono trovare i resti delle divisioni per due di M e dei quozienti successivi
- *Esempio: 210_{10}*

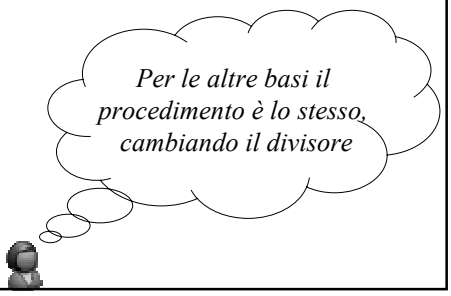
210	*2*	*resto 0*
105	*2*	*resto 1*
52	*2*	*resto 0*
26	*2*	*resto 0*
13	*2*	*resto 1*
6	*2*	*resto 0*
3	*2*	*resto 1*
1	*2*	*resto 1*
0		

Conversione da base 10 a base 2

- Leggendo la sequenza dal basso verso l'alto si ottiene il numero

$$11010010_2$$

- Per una corretta verifica basta riconvertire il risultato alla base 10



Conversione da base 10 a base 8

- Per convertire un numero in base 8 si devono trovare i resti delle divisioni successive del numero per la base 8
- *Esempio:* 741_{10}

741	*8*	*resto 5*
92	*8*	*resto 4*
11	*8*	*resto 3*
1	*8*	*resto 1*
0		

$= 1345_8$

Conversione da base 10 a base 16

- Per convertire un numero in base 16 si devono trovare i resti delle divisioni successive del numero per la base 16
- *Esempio:* 41660_{10}

41660	*16*	*resto 12 = C*
2603	*16*	*resto 11 = B*
162	*16*	*resto = 2*
10	*16*	*resto 10 = A*
0		

$= A2BC_{16}$

Conversione da base 2 a base 8 e base 16

- È semplice!
- Da base **2** a base **8**: basta prendere i bit a **gruppi di 3** e trovare il numero ottale corrispondente (che sarà compreso tra 0 e 7)
- Da base **2** a base **16**: basta prendere i bit a **gruppi di 4** e trovare il numero esadecimale corrispondente, (che sarà compreso tra 0 e F)

Rappresentazione dei numeri

- I numeri vengono distinti in tre categorie
  - Interi positivi
  - Interi con segno (positivi e negativi)
  - Reali (positivi e negativi con virgola)
- Ogni categoria viene rappresentata in modo diverso

NB**: indipendentemente dalla rappresentazione scelta, essa sarà di tipo finito e consentirà di rappresentare solo un **sottoinsieme finito di numeri!

Codici a lunghezza fissa

- Se si usa un numero **prestabilito** di cifre si ha un codice a **lunghezza fissa**
- In questo modo si pone anche un **limite** al numero massimo rappresentabile
- *Esempio: qual è il numero più grande rappresentabile con 4 cifre?*

in base 10	*9999*	
in base 2	*1111*	*(= 15_{10})*
in base 16	*FFFF*	*(= 65535_{10})*
in base 8	*7777*	*(= 4095_{10})*

Codici a lunghezza fissa

- Numeri maggiori di quello **massimo** rappresentabile causano problemi di **overflow**
  (ovvero per essere rappresentati richiedono più cifre di quelle a disposizione)
- *Esempio: 4 cifre*

in base 10	*$9999 + 1 = 10000_{10}$*
in base 2	*$1111 + 1 = 10000_{2}$ $(= 16_{10})$*
In base 16	*$FFFF + 1 = 10000_{16}$ $(= 65536_{10})$*
in base 8	*$7777 + 1 = 10000_{8}$ $(= 4096_{10})$*

Numeri interi positivi

- In generale, con **N** cifre a disposizione e base **b** il più grande numero (intero positivo) rappresentabile si può esprimere come

$$b^N - 1$$

- *Esempio: N=4*

in base 10	*9999*	$= 10^4 - 1$
in base 2	*1111*	$= 2^4 - 1$
in base 16	*FFFF*	$= 16^4 - 1$
in base 8	*7777*	$= 8^4 - 1$

Operazioni

- Vediamo solo il caso della addizione nella codifica binaria
  - ✓ si mettono in colonna i numeri da sommare
  - ✓ si calcola il riporto ogni volta che la somma parziale supera il valore 1

0 + 0 = 0	con riporto 0
0 + 1 = 1	con riporto 0
1 + 0 = 1	con riporto 0
1 + 1 = 0	con riporto 1

Codici a lunghezza variabile

- Possiamo rappresentare i numeri usando **un numero variabile di cifre** (che dipende dal valore che si vuole rappresentare) introducendo un **simbolo speciale** che indica dove termina la rappresentazione di un numero e inizia quella del numero successivo

- *Esempio*

1001#11#1	*codice a lungh. variabile, # separatore*
100100110001	*codice a lungh. fissa, 4 bit per pixel*

Codici a espansione

- Permettono di definire dei codici a **lunghezza variabile** senza far uso del carattere di separazione

  - ✓ Si stabiliscono dei formati di rappresentazione che fanno uso di un numero diverso di cifre
  - ✓ Si definiscono delle regole per distinguere tra i vari formati

Codici a formati multipli predefiniti

- ✓ *4 formati di rappresentazione a 4, 7, 10, 16 bit*
- ✓ *identificati da 00, 01, 10, 11*

0	***00***000
1	***00***001
2	***00***010
3	***00***011
4	***01***00000
5	***01***00001
6	***01***00010
7	***01***00011
8	***01***00100
...	
...	
35	***01***111111

36	***10***0000000000
37	***10***0000000001
38	***10***0000000010
39	***10***0000000011
...	
291	***10***1111111111
292	***11***0000000000000000
293	***11***0000000000000001
294	***11***0000000000000010
...	
16674	***11***0111111111111111
16675	***11***1111111111111111

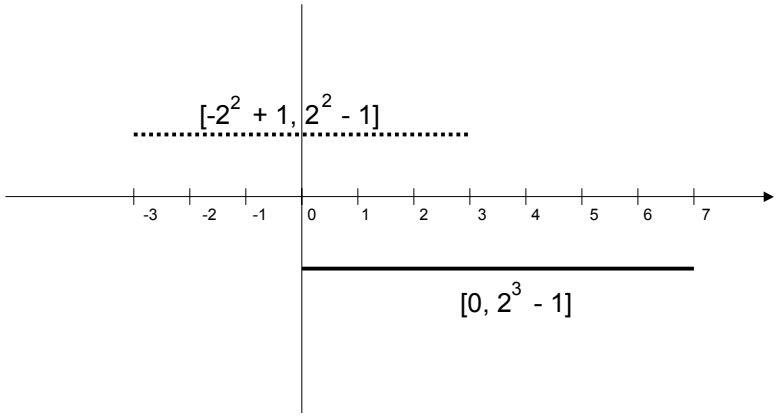
Codici a espansione con cifra di espansione

- ✓ *4 formati di rappresentazione a 4, 7, 10, 16 bit*
- ✓ *identificati da 0, 10, 110, 111*

0	***0***000
1	***0***001
2	***0***010
3	***0***011
...	
7	***0***111
8	***10***000000
9	***10***000001
10	***10***000010
11	***10***000011
...	
39	***10***111111

40	***110***0000000
41	***110***0000001
42	***110***0000010
...	
167	***110***1111111
168	***111***0000000000000
169	***111***0000000000001
170	***111***0000000000010
...	
8358	***111***0111111111111
8359	***111***1111111111111

Numeri interi con segno



N=3, codice a lungh. fissa

Numeri interi con segno

- Si può pensare di usare un bit per il **segn**o
  - ✓ “0” identifica “+”
  - ✓ “1” identifica “-”
- Gli altri bit vengono usati per codificare il **valore assoluto** (**modulo**) del numero

Numeri interi con segno

- Problemi
  - ✓ Il numero 0 ha due rappresentazioni
    (-0 = 100…0 e +0 = 000…0)
  - ✓ Per l'operazione di somma si deve tener conto dei segni degli addendi
- Sono state pertanto introdotte altre tecniche di codifica
  - ✓ Complemento a 1
  - ✓ Complemento a 2

Complemento a 1

- La cifra più a sinistra indica il segno
- Per i **numeri positivi** (cifra più a sinistra "0") si codifica il valore assoluto del numero
- Per i **numeri negativi** (cifra più a sinistra "1") si devono **negare** tutte le cifre (dove c'è "1" mettere "0", dove c'è "0" mettere "1")
- *Esempi*
  - ✓ *N=8, +24 = **0**0011000, -24 = **1**1100111*
  - ✓ *Per trasfomare **1**0011111 si devono complementare i suoi bit e trovare il valore corrispondente a 1100000, ovvero 96. Il numero cercato è -96*

*NB: ci vuole un codice a **lunghezza fissa**, altrimeni il complemento a 1 non funziona!*

Complemento a 1

- L'operazione di somma funziona nel caso di **addendi positivi** e **addendi con segno opposto con risultato negativo**
- Negli altri casi (somma tra numeri negativi oppure somma tra addendi discordanti e con risultato positivo) il risultato è decrementato di 1
- Per risolvere questo problema è stata introdotta una nuova codifica: **complemento a 2**
- Verrà spiegata nel corso di Architetture degli Elaboratori insieme ad altre codifiche 

La rappresentazione dell'informazione

indipendentemente dall'informazione di partenza si ottiene sempre una sequenza di bit