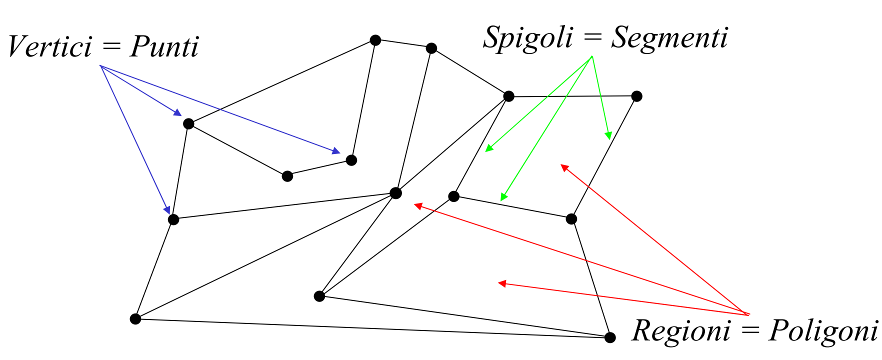
Lezione 4

Suddivisioni piane

1

Suddivisione piana

È una cosa fatta così:



Per definirla formalmente facciamo un passo indietro……

2

Grafi

- Un grafo è una struttura combinatorica (non geometrica) G=(N,A) costituita di:
  - Un insieme di *nodi* N
  - Un insieme di *archi* $A \subseteq N \times N$
- Consideriamo grafi in cui gli estremi di un arco sono sempre distinti (no archi tipo (x,x))
- Consideriamo grafi *non orientati,* ossia in cui la coppia (x,y) e la coppia (y,x) rappresentano lo stesso arco
- Grafo connesso: ogni coppia di nodi è collegata da una catena di archi

3

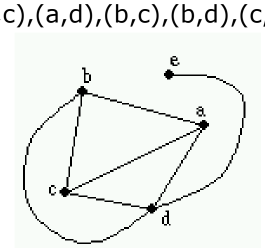
Grafi

Rappresentazione grafica di un grafo:
- nodo ➡ punto (detto *vertice*)
- arco ➡ segmento di curva (detto *spigolo*)

Esempio: G=(N,A)

N = {a,b,c,d,e}

A = {(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(c,d),(d,e)}



La rappresentazione è una coppia (V,E) di *oggetti geometrici*:
- V insieme dei vertici
- E insieme degli spigoli

4

Grafi planari e grafi piani

- Un grafo si dice *planare* se ammette una rappresentazione nel piano tale che nessuna coppia di spigoli si intersechi eccetto nei vertici comuni

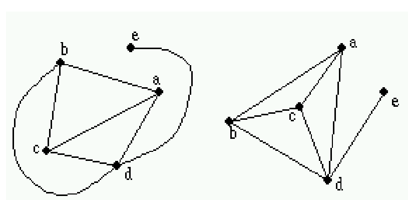
- Un *grafo piano* è una rappresentazione piana di un grafo planare

  - Un grafo planare è un grafo: oggetto *combinatorico*
  - Un grafo piano è una rappresentazione: oggetto *geometrico*

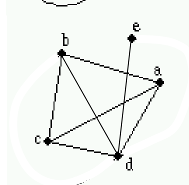
5

Grafi planari e grafi piani

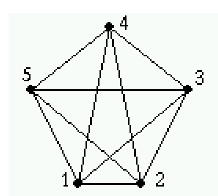
Due rappresentazioni piane di un grafo planare



Rappresentazione non planare di un grafo planare



Grafo non planare



6

Catene e cicli

- Una *catena* in un grafo è una sequenza alternata di vertici e spigoli

  $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 v_3 \ldots\ldots v_{k-2} e_{k-1} v_{k-1} e_k v_k$

  tale che $\forall i=1\ldots k$ i vertici di e_i sono v_{i-1} e v_i
- Un grafo si dice *connesso* se per ogni coppia di vertici u e v esiste una catena che collega u a v
- Un *ciclo* è una catena tale che $v_0=v_k$

7

Facce di un grafo piano

- Sia G=(V,E) grafo piano
- Consideriamo l'insieme

  $F=R^2\setminus G$

  ottenuto sottraendo dal piano Euclideo tutti i punti che stanno su vertici o spigoli di G
- Le componenti connesse di F si dicono *facce* di G
- Ogni faccia di F è contornata da uno o più cicli di spigoli di E e vertici di V
  - un ciclo: faccia semplicemente connessa
  - più cicli: faccia molteplicemente connessa
- Se G è connesso, ci sono solo facce limitate semplicemente connesse + una faccia illimitata (detta *faccia infinita*)

8

Formula di Eulero

- Sia G=(V,E) grafo piano connesso
- Siano:
  - n = numero dei vertici
  - e = numero degli spigoli
  - f = numero di facce
- Allora vale sempre la relazione:

$$n - e + f = 2$$

9

Formula di Eulero

Dimostrazione (induzione su e):

- Base:
  - Se e=0 allora
    - f=1 (faccia infinita) e
    - n=1 (perché G connesso)
  - Se e=1 allora
    - f=1 e
    - n=2 (perché e ha due estremi distinti)

10

Formula di Eulero

- Passo:
  - Assumiamo che la formula sia vera per ogni grafo con meno di e archi
  - Caso 1: se esiste almeno un vertice v di grado 1
    - cancelliamo il vertice v e il suo unico arco incidente
    - non abbiamo cambiato il numero delle facce
    - otteniamo un grafo piano G’ con n-1 vertici, e-1 archi e f facce
    - per ipotesi deve valere (n-1)-(e-1)+f = 2
    - semplificando: n-e+f=2

Formula di Eulero

- Caso 2: non esiste nessun vertice di grado 1
  - allora deve esistere almeno un ciclo di spigoli che delimita una faccia finita
  - cancelliamo uno degli spigoli che separanpo tale faccia dal proprio esterno, immergendola quindi con una sua faccia adiacente
  - otteniamo un grafo piano G” con n vertici, e-1 archi e f-1 facce
  - per ipotesi deve valere n-(e-1)+(f-1) = 2
  - semplificando: n-e+f=2

Grafi massimali

- Un grafo planare si dice *massimale* se non è possibile aggingere alcun arco al grafo senza pardere la planarità

Proposizione:

- La rappresentazione piana di un grafo planare massimale è un grafo piano in cui ogni faccia è contornata da un ciclo costituito da esattamente tre spigoli

Si dimostra per assurdo……

13

Grafi piani a spigoli rettilinei

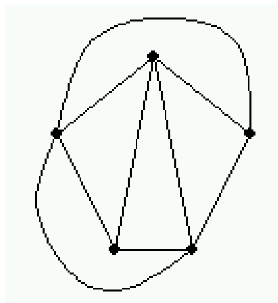
- Un grafo piano a spigoli rettilinei è un grafo piano in cui tutti gli spigoli sono segmenti di linea retta
- Un grafo piano a spigoli rettilinei si dice *massimale* se non è possibile aggiungere alcuno spigolo rettilineo senza incrociare altri spigoli

Proposizione:

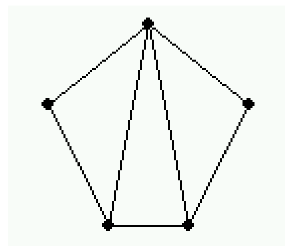
- In un grafo piano a spigoli rettilinei massimale ogni faccia *limitata* è contornata da un ciclo costituito da esattamente tre spigoli e la faccia infinita è contornata da un *poligono convesso*

14

Grafi massimali



A spigoli curvilinei



A spigoli rettilinei

15

Proprietà dei grafi piani

Lemma 1:

- In un grafo piano connesso G con n vertici ed e spigoli, con n>3, vale:
    1. $e \leq 3n - 6$
    2. inoltre se $e = 3n-6$ allora G è massimale

Dimostrazione:

- Se G massimale:
    - ogni faccia di G ha tre spigoli sul contorno e ogni spigolo di G è comune a due facce, quindi vale $3f = 2e$
    - sostituendo nella formula di Eulero otteniamo $n-e+(2/3)e = 2 \Leftrightarrow n- e/3 = 2 \Leftrightarrow 3n-e=6 \Leftrightarrow e =3n - 6$
- Se G non è massimale:
    - possiamo aggiungere a G nuovi spigoli fino ad ottenere un grafo G’ massimale con e’>e spigoli e n vertici
    - per quanto visto deve valere $e' =3n - 6$, quindi $e<3n-6$

16

Proprietà dei grafi piani

Lemma 2

- In un grafo piano connesso G con $n>2$ vertici ed f facce vale:
  1. $f \leq 2n - 4$
  2. inoltre se $f = 2n-4$ allora G è massimale

Dimostrazione: analoga a quella del Lemma 1

- Per esercizio

Teorema:

- Un grafo piano connesso con n vertici ha $O(n)$ spigoli e facce

Dimostrazione: segue dai Lemmi 1 e 2

17

Suddivisioni piane

Una *suddivisione piana* è una tripla

$$\Sigma=(V,E,F)$$

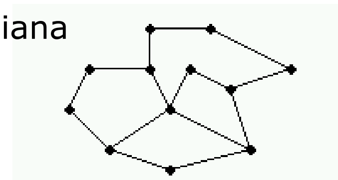
tale che:

- $G=(V,E)$ è un grafo piano:
  1. connesso
  2. in ciascun vertice incidono esattamente due spigoli appartenenti alla stessa faccia
  3. a spigoli rettilinei
- F è l'insieme delle facce di G

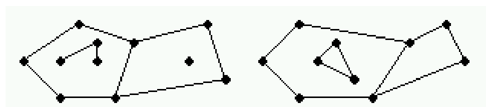
18

Suddivisioni piane

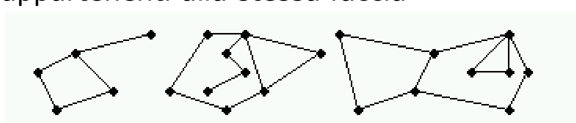
Suddivisione piana



No suddivisioni perché non connessi



No suddivisioni perché su un vertice incidono meno o più di due spigoli appartenenti alla stessa faccia



19

Suddivisioni piane

Le condizioni

1. connesso
2. in ciascun vertice incidono esattamente due spigoli appartenenti alla stessa faccia

semplificano le strutture dati

La condizione

3. a spigoli rettilinei

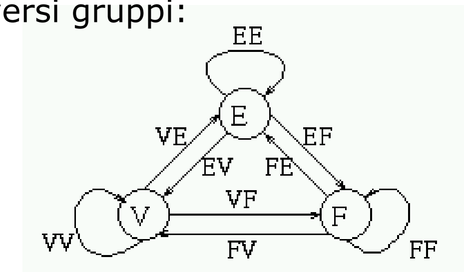
riflette le ipotesi nelle applicazioni (spigoli non rettilinei approssimati da polyline)

20

Rappresentazione

Una suddivisione piana è descritta da:

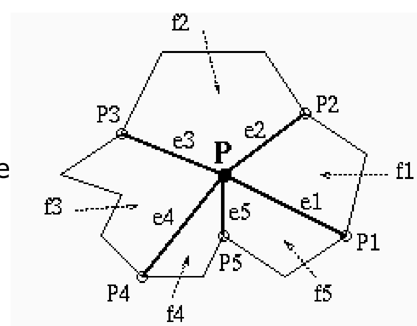
- tre gruppi di entità primitive:
  - vertici di V
  - spigoli di E
  - facce di F
- nove relazioni topologiche (incidenza/adiacenza) tra entità dei diversi gruppi:



Relazioni basate sui vertici

VE (Vertex-Edge):

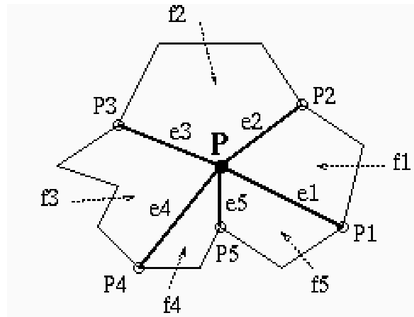
- Ad un vertice p associa la successione (e1,e2,…,er) degli spigoli che hanno un estremo in p (detti *spigoli incidenti* in p), ordinati radialmente in senso antiorario attorno a p
- La successione è univocamente determinata ma è circolare, quindi l’elemento iniziale è arbitrario



Relazioni basate sui vertici

VV (Vertex-Vertex):

- Ad un vertice p associa la successione (p1,p2,…,pr) di vertici collegati a v da spigoli (detti *vertici adiacenti* a p), ordinati radialmente in senso antiorario attorno a p
- C'è una corrispondenza biunivoca tra gli spigoli di VE(p) e i vertici di VV(p), quindi si assume che le due successioni siano consistenti (stesso elemento iniziale)

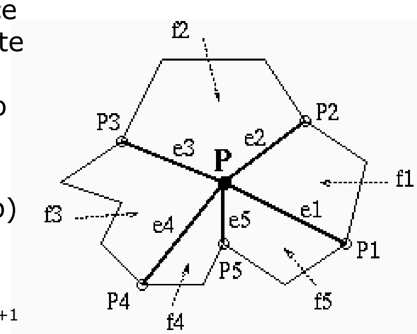


23

Relazioni basate sui vertici

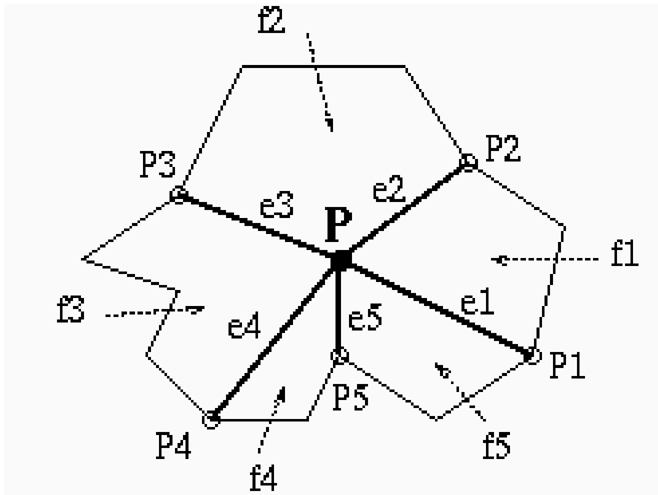
VF (Vertex-Face):

- Ad un vertice p associa la successione (f1,f2,…,fr) di facce aventi p sul loro contorno (dette *facce incidenti* in p), ordinate radialmente in senso antiorario attorno a p
- C'è una corrispondenza biunivoca tra gli spigoli di VE(p) e le facce di VF(p):
  - per convenzione: la faccia f_i è delimitata dagli spigoli e_i ed e_{i+1}



24

Relazioni basate sui vertici



25

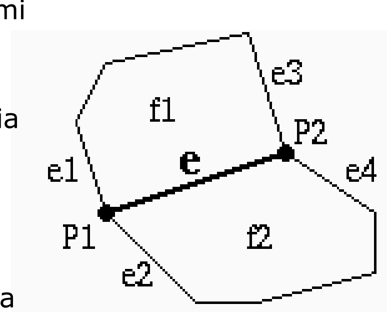
Relazioni basate sui spigoli

EV (Edge-Vertex):

- ❖ Ad uno spigolo e associa la coppia (p1,p2) di vertici che sono estremi di e (detti *vertici incidenti* in e)

EF (Edge-Face):

- ❖ Ad uno spigolo e associa la coppia (f1,f2) di facce delimitate da e (dette *faccie incidenti* in e)



Consistenza delle relazioni:

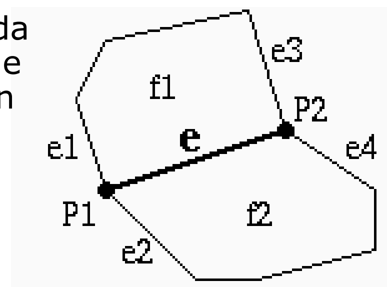
- ❖ La faccia f1 [f2] si trova a sinistra [destra] della retta orientata da p1 a p2

26

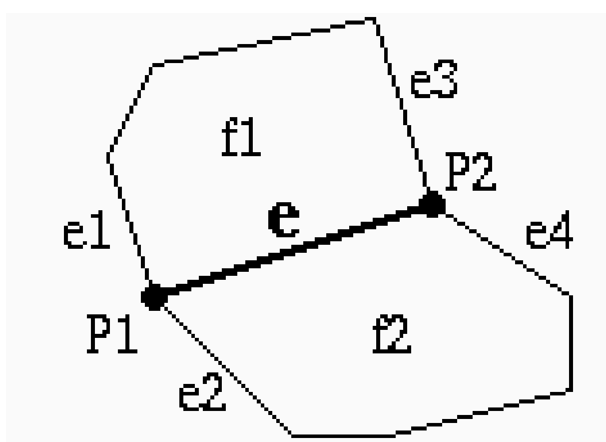
Relazioni basate sugli spigoli

EE (Edge-edge):

- Ad uno spigolo e associa due coppie di spigoli ((e1,e2),(e3,e4)) formate da spigoli che hanno in comune un vertice ed una faccia con e (detti *spigoli adiacenti* ad e)
- Consistenza delle relazioni:
  - e1 incide su p1 e f1
  - e2 incide su p1 e f2
  - e3 incide su p2 e f1
  - e4 incide su p2 e f2



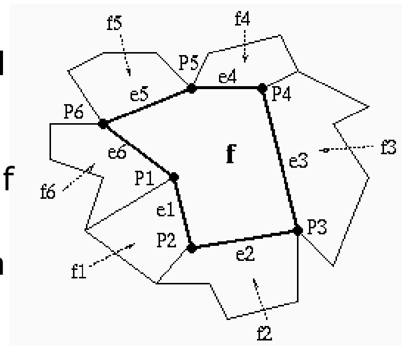
Relazioni basate sugli spigoli



Relazioni basate sulle facce

FE (Face-Edge):

- Ad una faccia f associa la successione (e1,e2,…,em) degli spigoli che formano il contorno di f (detti *spigoli incidenti* in f), ordinati in senso antiorario attorno a f
- La successione è univocamente determinata ma è circolare, quindi l’elemento iniziale è arbitrario

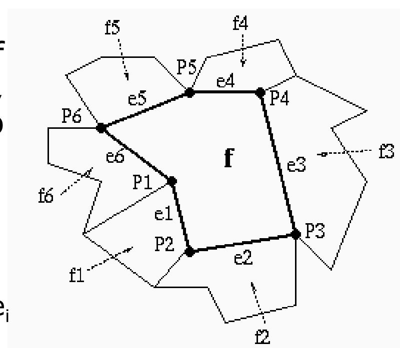


29

Relazioni basate sulle facce

FV (Face-Vertex):

- Ad una faccia f associa la successione (p1,p2,…,pm) dei vertici del contorno di f (detti *vertici incidenti* in f), ordinati in senso antiorario attorno a f
- C’è una corrispondenza biunivoca tra gli spigoli di FE(f) e i vertici di FV(p):
  - per convenzione: lo spigolo e_i ha come estremi i vertici v_i e v_{i+1}

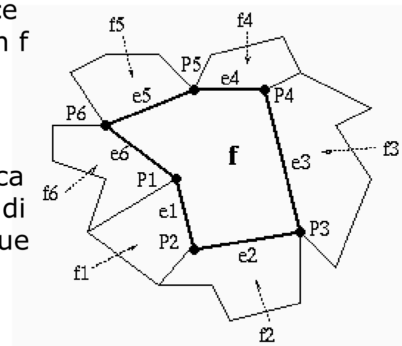


30

Relazioni basate sulle facce

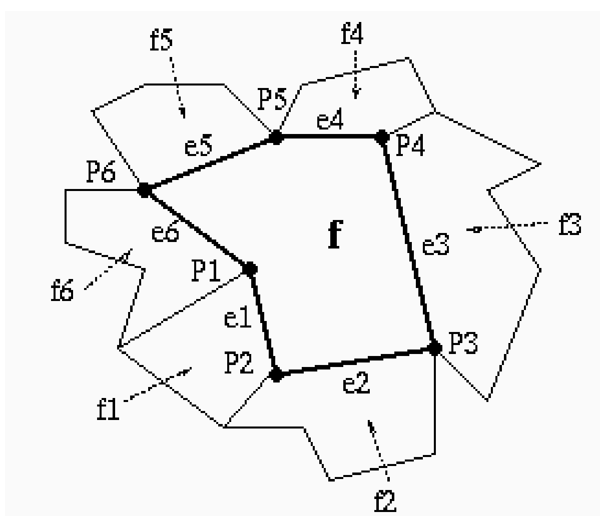
FF (Face-Face):

- Ad una faccia f associa la successione (f1,f2,…,fm) di facce che condividono uno spigolo con f (dette *facce adiacenti* a f), ordinate radialmente in senso antiorario attorno a f
- C'è una corrispondenza biunivoca tra gli spigoli di FE(f) e le facce di FF(f), quindi si assume che le due successioni siano consistenti (stesso elemento iniziale)



31

Relazioni basate sulle facce



32

Relazioni costanti e relazioni variabili

- Si dicono relazioni costanti [variabili] quelle che coinvolgono un numero costante [variabile] di elementi:
  - EV, EE, EF sono costanti
    - uno spigolo ha 2 estremi, 2 facce incidenti e 4 spigoli adiacenti
  - VV, VE, VF, FV, FE, FF sono varibili
    - il numero di vertici/spigoli/facce incidenti su/adiacenti a un dato spigolo/faccia non è fisso

33

Operatori di Eulero

ALLA LAVAGNA

34

Riferimenti

- Dispense:
  - Capitolo 3

35