Metodi Formali dell'Informatica (IV Anno), Febbraio 1999 - complessita', calcolabilita', lambda-calcolo e tipi

Esercizio di Complessita' (5 punti) Dire se le seguenti asserzioni sono vere o false, GIUSTIFICANDO LA RISPOSTA:

- $\forall L \in NP. \forall L' \in P. L - L' \in P$
- $\forall L \in NP. \forall L' \in P. L - L' \in NP$
- $\forall L, L' \in NP. \{x | x \in L \wedge \overline{x} \in L'\} \in NP$, dove $\overline{x}$ e' la stringa binaria ottenuta scambiando 0 con 1 (p.e. $\overline{010} = 101$) e si suppone di considerare solo linguaggi costituiti da strighe binarie.

Esercizio di Calcolabilita' (4 punti) Dire se il seguente insieme e' decidibile e/o semidecidibile, GIUSTIFICARE LA RISPOSTA: $\{x|$ la TM M_x con input x termina in $\leq |x|$ passi$\}$

Esercizio di lambda-calcolo (6 punti)

- Dati i λ-termini $M \equiv (\lambda y.y\ x)\ (\lambda z.x\ (\lambda x.x\ y))$ e $N = (\lambda x.x\ x)\ y\ z$, dire quale e' *un* risultato della sostituzione $[N/x]M$ (come risposta va bene un qualsiasi termine α-convertibile).
- Dire quale e' la β-normal form (modulo α-conversione) del λ-termine
  $M \equiv [\lambda y.y\ ((\lambda x.x\ x)\ y\ z)]\ [\lambda z.(\lambda x.x\ x)\ y\ z\ (\lambda x.x\ y)]$
  si consiglia di ridurre prima a forma normale i due sottotermini tra parentesi quadre.
- Dire se i seguenti termini sono $\alpha\beta$-convertibili: $M \equiv (\lambda x.x\ x)\ (\lambda y.x\ y)$ e $N \equiv (\lambda y.x\ y)\ (\lambda x.y\ x)$.
- Dare dei λ-termini chiusi if, $true$, $false$ tali che $if\ true\ x\ y =_\beta x$ e $if\ false\ x\ y =_\beta y$

Metodi Formali dell'Informatica (IV Anno), Febbraio 1999 - compitino

Esercizio di Specifiche Sia SP_N la seguente specifica

una sort N, due operazioni $0 : N$ e $succ : N \to N$, nessun assioma

SP_N ha un ovvio modello iniziale A con N^A l'insieme dei naturali. Dare una specifica condizionale SP che estende SP_N, in modo che nel modello iniziale B di SP **esista unico** $b \in N^B$ t.c. $\forall n.b \neq [s^n(0)]^B$.

Soluzione SP si puo' ottenere aggiungendo una costante $b : N$ ed un assioma $succ(b) = b$. E' immediato verificare la proprieta' richiesta sul modello iniziale usando il modello iniziale delle forme normali chiuse, in cui N^B e' $\{succ^n(0) | n \text{ naturale}\} \cup \{b\}$.

Esercizio di Riscrittura Si consideri una segnatura con due constanti a e b ed una operazione binaria $*$, e il seguente sistema di riscrittura

$$a * x \to x \quad b * x \to b \quad x * a \to x \quad x * b \to b$$

- il sistema e' ortogonale?
- il sistema e' localmente confluente? (indicare eventuali coppie critiche)
- * (OPZIONALE) caratterizzare (p.e. mediante una BNF) i termini chiusi in forma normale

Soluzione Il sistema non e' ortogonale perche' ci sono coppie critiche 4, tuttavia e' localmente confluente perche' tutte le coppie critiche sono confluenti. I termini che danno origine a coppie critiche sono $a * a$ (e confluisce ad a), $a * b$, $b * a$ e $b * b$ (e confluiscono a b). Le forme normali chiuse sono a e b.

Esercizio di λ-calcolo e tipi Si vuole estendere il λ-calcolo (o logica combinatoria) con una nuova costante C che soddisfa il seguente assioma $C\ M = C$.

- dire se nel λ-calcolo puro e' gia' definibile un termine chiuso M_C che soddisfa l'assioma di C, o meglio ancora t.c. $M_C\ M \to^*_\beta M_C$.

(OPZIONALE) Far vedere che $(\forall X.X) \leq (\forall X, Y.X \to Y)$ usando le regole di sub-typing per i tipi universali (vedi Note 3 MFI pag 23).

Soluzione Possiamo definire C usando un operatore di punto fisso del lambda calcolo puro. Infatti una formulazione equivalente dell'assioma per C e' $C = \lambda y.C$, e quindi $C \triangleq Y(\lambda x, y.x) \equiv Y(K)$. Usando come Y l'operatore di punto fisso di Turing si ha che $C \to^* K\ C$ e quindi $C\ M \to^* K\ C\ M \to C$.

Esercizio di CCS Si considerino i seguenti processi CCS

$$P = fix\{X = ping.X + \overline{pong}.X\} \qquad Q = fix\{Y = \overline{ping}.pong.Y\}$$

- dare i LTS FINITI corrispondenti ai due processi
- dire se il processo CCS $R = fix\{Z = \tau.Z\}$ e' STRONG BISIMILAR al processo $S \triangleq (P|Q)\backslash\{ping, pong\}$, GIUSTIFICANDO LA RISPOSTA.

Soluzione Il LTS per P ha un solo stato P e le transizioni $P \xrightarrow{ping} P$ e $P \xrightarrow{\overline{pong}} P$. Il LTS per Q ha un due stati Q e $Q' \equiv pong.Q$ e le transizioni $Q \xrightarrow{\overline{ping}} Q'$ e $Q' \xrightarrow{pong} Q$.
Il LTS per R ha un solo stato R ed una sola transizione $R \xrightarrow{\tau} R$. per S ha due stati S ed $S' \triangleq (P|Q')\backslash\{ping, pong\}$ e le transizioni $S \xrightarrow{\tau} S'$ e $S' \xrightarrow{\tau} S$. S e' strong bisimilar a R, infatti la relazione $\{(S, R), (S', R)\}$ e' una strong bisimulation.