Capitolo 6

Algoritmi per il calcolo della triangolazione di Delaunay

6.1 Introduzione

Gli algoritmi per il calcolo della triangolazione di Delaunay si possono dividere in tre gruppi:

- gli algoritmi che operano in due passi:
  1. calcolando il *diagramma di Voronoi*;
  2. e costruendo il *duale* di tale diagramma, da cui ricavano la *triangolazione di Delaunay*;
- gli algoritmi che calcolano il *guscio convesso in 3D* $\Rightarrow$ possono essere usati per calcolare triangolazioni di Delaunay in 2D (proprietà interessante della triangolazione di Delaunay che non è stata vista);
- gli *algoritmi diretti*.

6.2 Gli algoritmi diretti

Gli algoritmi diretti calcolano direttamente la triangolazione di Delaunay di un insieme di n punti senza passare attraverso strutture intermedie. Gli approcci fondamentali sono:

- incrementale $\rightarrow$ complessità temporale $O(n^2)$
- divide-et-impera $\rightarrow$ complessità temporale $O(n \log n)$

6.2.1 Algoritmi incrementali

1. Algoritmi basati sul calcolo preventivo di una triangolazione qualunque.
2. Algoritmi di "espansione".
3. Algoritmi *on-line*, basati su:
   - scambio di spigoli;
   - calcolo del poligono di influenza (Watson).

6.2.2 Algoritmi del I tipo

Sia V un insieme di n punti nel piano. Passi effettuati e complessità:

1. ordinamento dei punti di V: $O(n \log n)$;
2. costruzione di una triangolazione T' mediante tecnica di sweep: $O(n)$;
3. ottimizzazione di $T' \Rightarrow$ *triangolazione di Delaunay* T: $O(n^2)$.

Il procedimento di ottimizzazione

Si ripete l'applicazione del criterio dell'angolo o del cerchio ad ogni quadrilatero strettamente convesso formato da due triangoli adiacenti della triangolazione, finché *tutti* gli spigoli interni risultano localmente ottimali.
Poiché in ogni iterazione del procedimento si esaminano *tutti* gli spigoli interni $\rightarrow$ si effettuano $O(n)$ operazioni. Complessivamente: $O(n^2)$.

6.2.3 Algoritmi di espansione

Esaminiamo l'algoritmo di Lawson (1977).

L'algortimo di Lawson

L'algoritmo consiste nella combinazione del passo di triangolazione con il passo di ottimizzazione. Questi sono i passi effettuati:

1. ordinamento dei punti dati;
2. costruzione del primo triangolo (che unisce i primi tre punti dati, se non allineati);
3. ad ogni iterazione, aggiunge il punto P che segue nell'ordinamento, nel modo seguente:
   (a) connette P ai vertici *visibili*;
   (b) ottimizza "immediatamente" la triangolazione risultante.

Quindi ad ogni iterazione produce *una* triangolazione di Delaunay di un sottoinsieme dei punti dati.
La complessità di questo algorimto è $O(n^2)$ nel caso peggiore (a causa del processo di ottimizzazione).

6.2.4 Algoritmi on-line

Gli algoritmi on-line si basano su un *aggiornamento di una triangolazione di Delaunay in seguito all'inserimento di un nuovo punto.* I punti non devono necessariamente essere tutti noti all'inizio.

Problema. *Inserimento di un nuovo vertice in una triangolazione di Delaunay.* Sia V_i un insieme finito di punti nel piano (con $\#V_i = n$). Sia T_i una triangolazione di Delaunay di V_i. Sia P un punto del piano tale che $P \notin V_i$.
Si vuole determinare una triangolazione di Delaunay T_{i+1} di $V_{i+1} = V_i \cup \{P\}$.

* * *

Nota. Gli algoritmi on-line permettono di ottenere una sequenza di triangoli di Delaunay e quindi di costruire *una* triangolazione di Delaunay di un insieme V di punti mediante *raffinamenti successivi.*

L'algoritmo di Watson

Sia T_i una triangolazione di Delaunay di un insieme finito V_i di punti nel piano. Sia P un punto del piano tale ceh $P \notin V_i$. Definiamo:

- *regione di influenza di* P (indicata con R_P) come la regione del piano formata dall'unione dei triangoli $t \in T_i$ la cui circonferenza circoscritta contiene P al suo interno;
- *poligono di influenza di* P (indicato con Q_P) come il poligono formato dai lati esterni dei triangoli di T_i che definiscono la regione di influenza.

Algoritmo per inserire il punto P

1. Individuazione della regione R_P (e del poligono) di influenza;
   Cancellazione dei triangoli che lo definiscono;
2. Ritriangolazione di R_P con inserimento di P.

Risultati che assicurano la correttezza dell'approccio

Teorema 6 *Sia $\mathcal{T}_P$ l'insieme dei triangoli di T_i che formano la regione di influenza di P. L'inserimento di P modifica un triangolo di T se e solo se $t \in \mathcal{T}_P$.*

Dimostrazione. Se $t \in \mathcal{T}_P \Rightarrow t$ è modificato per la definizione di regione di influenza.
Se $t \notin \mathcal{T}_P \Rightarrow$ la circonferenza circoscritta a t non contiene P; poiché t è un triangolo di T_i tale circonferenza non contiene alcun punto di $V_i \Rightarrow t$ è un triangolo della triangolazione di Delaunay T_{i+1} di $V_i \cup \{P\}$.

* * *

Teorema 7 *La triangolazione T_{i+1} di $V_i \cup \{P\}$ ottenuta da T_i cancellando gli spigoli interni di R_P e unendo P ai vertici di Q_P è una triangolazione di Delaunay di $V_i \cup \{P\}$.*

Dimostrazione. Per il teorema precedente l'unica parte della triangolazione di T_i da modificare è inerna a Q_P. Se Q_P è un triangolo, la dimostrazione è immediata. In caso contrario:

1. gli spigoli interni a R_P vanno eliminati poiché contornano dei triangoli $\in \mathcal{T}_P$;
2. i nuovi spigoli inseriti sono localmente ottimali.

Dimostriamo 2. per assurdo. Sia $\overline{PP_i}$ uno spigolo inserito in T_{i+1} se $\overline{PP_i}$ non fosse localmente ottimale allora, detti PP_iP_j e PP_iP_k i due triangoli adiacenti lungo $\overline{PP_i}$,

FIGURA LUCIDO 9

lo spigolo $\overline{PP_i}$ andrebbe sostituito con P_iP_k generando $P_j\widehat{P_i}P_k$ e $P_i\widehat{P}P_k$. In questo caso, si ha che $t \equiv P_j\widehat{P_i}P_k$ è un triangolo $\in \mathcal{T}_P$ e quindi non va bene; oppure t non era un triangolo di $T_i \Rightarrow$ la circonferenza circoscritta a t contiene qualche punto di V_i al suo interno.

* * *

Algoritmo

1. Individuazione di R_P
   (a) individuazione del triangolo t in T_i contenente P;
   (b) determinazione a partire da t dei triangoli $\in \mathcal{T}_P$ ed eliminazione degli spigoli interni;
2. Ritriangolarizzazione del poligono di influenza.

Complessità

1. (a) richiede l'analisi di T_i (vedere la localizzzione di un punto in una trasformazione senza preelaborazione): $O(n)$ (nel caso peggiore);
   (b) visita breadth-first di T_i a partire da t procedendo per triangoli adiacenti secondo uno spigolo $\Rightarrow$ esame dei triangoli di $\mathcal{T}_P$ + i triangoli "esterni" adiacenti a Q_P secondo uno spigolo: $O(\#\text{triangoli di } \mathcal{T}_P + \# \text{ lati di } Q_P)$ ($= O(n)$ nel caso peggiore).

   Caso peggiore: $O(n)$.
2. $O(\# \text{ lati di } Q_P)$ $O(n)$ (caso peggiore).

Nota. I passi 1.(b) e 2. hanno una complessità lineare nel numero dei triangoli coinvolti e di quelli lungo il bordo di Q_P $\Rightarrow$ in pratica i valori sono $\ll n$.
Per cui si parla di "effetto locale dell'inserimento di un punto in una triangolazione di Delaunay".

6.3 Caso tridimensionale

6.3.1 Complessi simpliciali Delaunay-based

Sia $\Sigma = (V, E, F, T)$ un complesso simpliciale connesso tridimensionale. Σ è una tetraedralizzazione di Delaunay se e solo se, per ogni tetraedro t di Σ, la sfera circoscritta a t non contiene nessun punto di V al suo interno (*proprietà della sfera vuota*).
Si può dimostrare che se non esiste una 5-tupla di punti cosferici in V, la tetraedralizzazione di Delaunay è unica.

6.3.2 Differenze tra triangolazioni di Delaunay bi e tri-dimensionali

1.	Il numero di triangoli nella triangolazione di Delaunay di un poligono convesso di n vertici è unico e dipende solo da n.	Il numero di tetraedri nella tetraedralizzazione di Delaunay di un poliedro convesso non è unico anche a parità di numero di vertici.
2.	In una triangolazione di Delaunay bidimensionale, l'inserimento di un nuovo punto incrementa il numero di triangoli.	In una tetraedralizzazione di Delaunay tridimensionale, l'inserimento di un nuovo punto può sia incrementare che decrementare il numero di tetraedri.
3.	In due dimensioni, il piano può essere suddiviso in triangoli equilateri.	In tre dimensioni, non è possibile ricoprire lo spazio usando solo tetraedri equilaterali (poiché un tetraedro equilaterale è composto di angoli solidi di 70^o).

6.3.3 Algoritmi per costruire complessi simpliciali Delaunay-based

1. *Metodi indiretti.* Fanno uso di strutture intermedie: diagrammi di Voronoi ed il guscio convesso in quattro dimensioni (algoritmi che proiettano il guscio comnvesso di un set di n punti in quattro dimensioni: $O(n \log n + n^2)$ nel caso ottimale).

2. *Metodi diretti.* Suddivisi in:

   - *Metodi di costruzione incrementale:* applicazione del criterio della sfera vuota = addizione di tetraedri di Delaunay ad ogni step. Ad esempio: Avis e Battacharya (1983), Cignoni et al. (1992) ($O(n^3)$ nel caso peggiore);
   - *Metodi on-line:* costruzioni di tetraedri fittizi contenenti tuti i punti ed inserimento dei punti uno alla volta. Ad esempio: Joe (1991), Edelsbrunner e Shah (1992), Watson (1981) ($O(n^3)$ nel caso peggiore);
   - *Metodi divide-et-impera:* variazione di questo paradigma proposta da Cignoni et al. (1992) ($O(n^3)$ nel caso peggiore).

6.3.4 L'algortimo di Watson

Sia S un insieme di punti in $\mathbf{R}^3$. Si devono eseguire i seguenti passi per costruire una tetraedralizzazione di Delaunay Σ di S:

1. calcolare il tetraedtro fittizio $\bar{t}$ contenente tutti i punti S ed aggiungerlo a Σ;

2. per ogni punto p in S:

   (a) per ogni tetraedro t in Σ (tetraedralizzazione corrente) tale che la sfera circoscritta a T contiene p, cancellare t da Σ;

   (b) unire p con tutti i vertici del poliedro ottenuto dalla cancellazione dei tetraedri al passo precedente;

3. cancellare da Σ tutti i tetraedri che condividono una faccia con $\bar{t}$.