Capitolo 5

Diagramma di Voronoi e triangolazione di Delaunay

5.1 Introduzione

Un *diagramma di Voronoi* è una rappresentazione delle relazioni di vicinanza di N punti nel piano (o nello spazio). Sia S un insieme finito di N punti nel piano.

Definizione 25 *Sia $P \in S$. La* regione di Voronoi di P, *indicata con* $\mathrm{V}(P)$, *è:*

$$\mathrm{V}(P) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 | \mathrm{d}(\mathbf{x}, P) < \mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ \forall \mathbf{y} \in S \setminus \{P\}\right\}$$

ovvero, il luogo dei punti del piano più vicini a P che a qualunque punto di $S \setminus \{P\}$.

Nota. Dati due punti P_i, $P_j \in S$, l'insieme dei punti nel piano più vicini a P_i che a P_j è il *semipiano* aperto $H(P_i, P_j)$ contenente P_i delimitato dall'asse del segmento $\overline{P_i P_j}$.

Si può dimostrare che $\forall P_i \in S$:

$$V(P_i) = \cap_{i \neq j} \left\{H(P_i, P_j) | P_j \in S\right\}.$$

Teorema 2 *$V(P_i)$ è un poligono convesso aperto contenente P_i.*

Dimostrazione. La regione di Voronoi di P_i è l'intersezione non vuota di un numero finito ($\leq N-1$) di semipiani $H(P_i, P_j)$. Quindi è un poligono convesso o una regione poligonale convessa illimitata. Poiché ciascun $H(P_i, P_j)$ è un semipiano aperto contenente P_i, ciò implica che $\cap H(P_i, P_j)$ è un insieme aperto contenente P_i.

* * *

Definizione 26 *Siano $P_i, P_j \in S$. La* regione di Voronoi della coppia $\{P_i, P_j\}$, *indicata con $V(\{P_i, P_j\})$, è l'insieme dei punti del piano equidistanti da P_i e P_j e più vicini a P_i e P_j che ad ogni altro punto S.*

Si può dimostrare che:

$V(\{P_i, P_j\})$ è un intervallo aperto (eventualmente *vuoto* e *illimitato*) di $A(P_i, P_j)$.

Infatti $V(\{P_i, P_j\})$ è l'intersezione di $A(P_i, P_j)$ con i semipiani aperti $H(P_i, P_k)$ e $H(P_k, P_j)$ con $i \neq k$ e $k \neq j$ (è l'intersezione di una retta con un insieme aperto convesso).

Definizione 27 *Sia* $K = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ *un sottoinsieme di* S *con cardinalità* ≥ 3. *Si indica con* $V(K)$ *la* regione di Voronoi relativa a K in S. *Essa è l'insieme deipunti del piano equidistanti da tutti i punti di* K *e più vicini ad essi che ad ogni altro punto di* S.

Si può dimostrare che:

$$V(K) = \emptyset$$

oppure che

$V(K)$ contiene un singolo punto P che è il centro della circonferenza passante per tutti i punti $\in K$.

Infatti, se K è composto da 3 punti $\{P_1, P_2, P_3\}$ allora $V(K)$ è la regione contenuta nell'intersezione degli assi dei segmenti $\overline{P_iP_j}$, $\overline{P_jP_q}$, $\overline{P_qP_i}$, e tale intersezione è al più un punto.

Quindi, riassumendo:

- $V(\{P_i, P_j\})$ è lo spigolo aperto condiviso dai poligoni chiusi corrispondenti a $V(P_i)$ e $V(P_j)$;
- $V(\{P_i, \dots, P_m\})$ con $m \geq 3$ e $P_1, \dots, P_m \in S$ è l'unico vertice (se esiste) comune ai poligoni convessi chiusi corrispondenti a $V(P_i), \dots, V(P_m)$ (altrimenti $V(\{P_i, \dots, P_m\}) = \emptyset$).

5.2 Diagramma di Voronoi

Sia S un insieme finito di punti nel piano. Un *diagramma di Voronoi relativo a* S è una partizione del piano in un numero finito di "regiono" poligonali convesse aperte (facce), di "segmenti" aperti (spigoli) e di punti (vertici). Si indica con $\mathrm{Vor}(S)$ il *diagramma di Voronoi definito su* S.

Nota.

1. In questo contesto "regioni" e "segmenti" possono essere illimitati.
2. Pertanto un punto $\mathbf{x}$ nel piano $\mathbf{R}^2$ appartiene ad una faccia, ad uno spigolo o ad un vertice di $\mathrm{Vor}(S)$ a seconda che esistano uno, due o più punti di S a distanza minima da $\mathbf{x}$.

Un diagramma di Voronoi è quindi una suddivisione piana con facce e spigoli illimitati. Si può dimostrare che una regione di Voronoi $V(P_i)$ è illimitata $\Leftrightarrow$ $P_i \in$ al guscio convesso di S.

Teorema 3 *Le chiusure di tre o più regioni di Voronoi* $V(P_1), V(P_2), \dots, V(P_m)$ *hanno un vertice* Q *in comune se e solo se* $\exists$ *una circonferenza con centro in* Q *e passante per* $P_1, P_2, \dots, P_m$ *non contenente alcun punto di* S *al suo interno.*

5.3 Diagramma di Delaunay

Definizione 28 *Un* piano esteso *è un piano a cui è stato aggiunto un punto ausiliario, detto* punto all'infinito *(indicato con* ω*)*

Per convenzione, consideriamo ω come un ulteriore vertice di Voronoi.

Definizione 29 *Sia $G = (V, E, F)$ un grafo piano. Il* grafo duale di G *è un grafo $G^* = (V^*, E^*, F^*)$ ottenuto da G nel modo seguente:*

1. *ciascun vertice di G^* corrisponde ad una faccia di G;*
2. *siano f_1 ed f_2 due facce di G con uno spigolo e in comune. I vertici corrispondenti in G^* sono uniti da uno spigolo corrispondente ad e.*

Pertanto:

$V^* \leftrightarrow F$

$E^* \leftrightarrow E$

$F^* \leftrightarrow V$

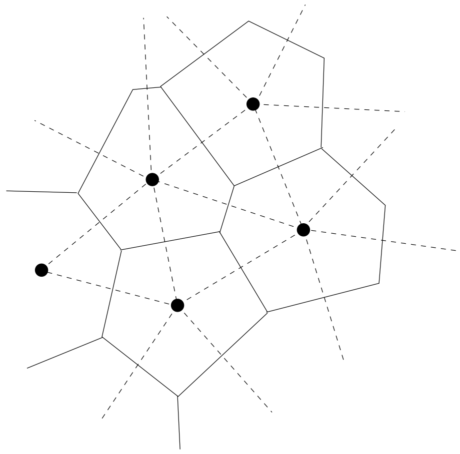


Figura 5.1: *Diagramma di Delaunay (gli spigoli seminfiniti si incontrano in ω).*

Definizione 30 *Chiamiamo* diagramma di Delaunay $\mathcal{C}$ di S *il duale del diagramma di Voronoi* $\mathrm{Vor}(S)$ *tale che i vertici di $\mathcal{D}$ coincidono con gli elementi di S.*

Definizione 31 *Sia $L \subset S$. La* regione di Delaunay $D(K)$ *è il duale di $V(K)$ (per cui $V(K) = \oslash \Leftrightarrow D(K) = \oslash$). Pertanto:*

- *per ogni $P_i \in S$, $D(\{P_i\})$ è il duale di $V(\{P_i\})$ ed è un vertice di $\mathcal{D}$ (localizzato in P_i);*
- *per ogni coppia $\{P_i, P_j\}$ tali che $P_i, P_j \in S$, $D(\{P_i, P_j\})$ è il segmento aperto $\overline{P_i P_j}$ se $V(\{P_i, P_j\}) \neq \oslash$ oppure $D(\{P_i, P_j\}) = \oslash$;*
- *per ogni $K \subset S$, tale che $\#K \geq 3$, se $V(K) \neq \oslash$, allora $D(K)$ è la faccia interna di $\mathcal{D}$ i cui vertici sono esattamente i punti di K, altrimenti $D(K) = \oslash$*

Si noti che la faccia esterna di $\mathcal{D}$ è in corrispondenza con ω.

Valgono i seguenti risultati:

- $D(K)$, con $K \subset S$, $\#K \geq 3$, è non vuoto $\Leftrightarrow$ i punti di K giacciono su una circonferenza non contenente alcun punto di S;
- la faccia esterna del diagramma di Delaunay è la regione esterna del guscio convesso di S.

Chiameremo nel seguito *"circonferenza S-libera"* una qualunque circonferenza passante per 3 o più punti di S e non contenente punti di S al suo interno.

5.3.1 Albero di ricoprimento euclideo di minima lunghezza

Sia S un insieme finito di punti del piano.

Definizione 32 *Un* albero di ricoprimento euclideo di lunghezza minima $T = (S, A)$ *è:*

1. *un grafo piano con spigoli rettilinei;*
2. *un albero di ricoprimento per S (cioè un albero con tutti e soli i vertici in S);*
3. *tale che $\sum_{a_i} l(a_i)$ sia minimo, dove con $l(a_i)$ si indica la lunghezza del segmento a_i fra tuti i grafi che soddisfano i punti 1. e 2.*

Valgono i seguenti risultati:

- sia $U \subset S$. Siano $P_i \in U$ e $P_j \in S \backslash U$ tali che la lunghezza $l(\overline{P_iP_j})$ sia minima. $\Rightarrow$ $\overline{P_iP_j}$ è uno *spigolo* del diagramma di Delaunay $\mathcal{D}$ di S;
- sia $P_i \in S$. Sia $P_j \in S$ il punto di S più vicino a P_i. $\Rightarrow$ $\overline{P_iP_j}$ è uno *spigolo* del digramma di Delaunay di S;
- ogni spigolo appartenente all'albero di ricoprimento euclideo di lunghezza minima, relativo ad un insieme S di punti dato, appartiene al diagramma di Delaunay di S.

Nota. *"Albero di ricoprimento euclideo di lunghezza minima"* = *"Euclidean Minimum Spanning Tree"* (*EMST*). *EMST* di S è un sottografo del diagramma di Delaunay $\mathcal{D}$ relativo a S.

5.3.2 Test della circonferenza

Formalizziamo il concetto di circonferenza P-libera definendo una primitiva (predicato booleano) che si applica a quattro punti distinti a, b, c, d nel piano.

Definizione 33 InCircle(a, b, c, d) *è* vero $\Leftrightarrow$ *il punto d è interno alla regione del piano delimitata dalla circonferenza orientata abc che giace alla sinistra di quest'ultima.*

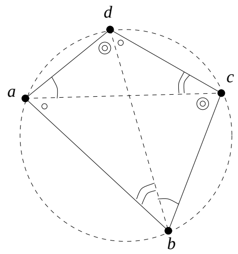
Una circonferenza orientata $\mathcal{C}$ individua due regioni distinte del piano; se l'orientamento è antiorario, la regione alla sinistra di $\mathcal{C}$ corrisponde alla parte interna della circonferenza.
Notare che nel caso *abc* siano allineati, la circonverenza degenera in 1 retta, e la regione interna alla circonferenza degenera nel semipiano sinistro rispetto alla retta orientata.

Lemma 1 *Sia abcd un quadrilatero semplice i cui vertici sono letti in senso antiorario.* InCircle(a, b, c, d) *è equivalente a:*

$$a\hat{b}c + c\hat{d}a < b\hat{c}d + d\hat{a}b$$

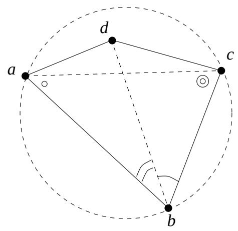
Dimostrazione.

- Caso limite: a, b, c, d cocircolari $\Rightarrow$ InCirlce(a, b, c, d) = <u>falso</u>.



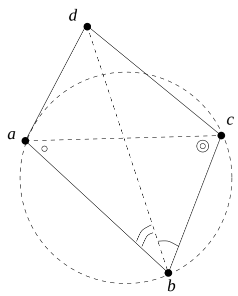
  Chiaramente, $a\hat{b}c + c\hat{d}a = b\hat{c}d + d\hat{a}b$.

- Portiamo d all'interno della circonferenza, InCirlce(a, b, c, d) = <u>vero</u>.



  L'angolo $c\hat{d}a$ aumenta, gli angoli $d\hat{a}b$ e $b\hat{c}d$ diminuiscono $\Rightarrow a\hat{b}c + c\hat{d}a > b\hat{c}d + d\hat{a}b$.

- Portiamo d all'esterno della circonferenza, InCirlce(a, b, c, d) = <u>false</u>.



  In maniera analoga, si ha diminuzione dell'angolo $a\hat{d}c$ e contemporaneo aumento degli angoli $d\hat{a}b$ e $b\hat{c}d$ diminuiscono $\Rightarrow a\hat{b}c + c\hat{d}a < b\hat{c}d + d\hat{a}b$.

* * *

5.3.3 Interpretazione tridimensionale del test della circonferenza

Sia P un insieme di punti dati. Sia xyz un sistema di coordinate cartesiane ortogonali in $\mathbf{R}^3$. Consideriamo l'applicazione:

$$l : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$$

$$l : (x, y) \to (x, y, x^2 + y^2)$$

che proietta i punti del piano sul paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$. Chiamiamo:

$$l(P) = \{(x, y, x^2 + y^2) | (x, y) \in P\}$$

Osservazione: Siano $l(a)$, $l(b)$, $l(c)$ tre punti in $l(P)$, con $a = (x_a, y_a)$, $b = (x_b, y_b)$ e $c = (x_c, y_c)$ tre punti di P.
L'equazione del piano passante per i punti $l(a)$, $l(b)$ e $l(c)$ è:

$$\det \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_a & y_a & x_a^2 + y_a^2 & 1 \\ x_b & y_b & x_b^2 + y_b^2 & 1 \\ x_c & y_c & x_c^2 + y_c^2 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Lemma 2 *Test* InCircle(a, b, c, d) *è equivalente a:*

$$\Delta(a, b, c, d) = \det \begin{bmatrix} x_d & y_d & x_d^2 + y_d^2 & 1 \\ x_a & y_a & x_a^2 + y_a^2 & 1 \\ x_b & y_b & x_b^2 + y_b^2 & 1 \\ x_c & y_c & x_c^2 + y_c^2 & 1 \end{bmatrix} < 0$$

DIMOSTRAZIONE.

1. *Prima Parte.*
   Dimostriamo che a, b, c, d giacciono sulla stessa circonferenza $\Leftrightarrow$ $l(a)$, $l(b)$, $l(c)$ e $l(d)$ sono complanari.
   Dimostriamo "$\Rightarrow$":

   - a, b, c, d allineati $\to \Delta(a, b, c, d) = 0 \to l(d)$ complanare con $l(a)$, $l(b)$, $l(c)$ (basta sviluppare il determinante rispetto alla terza colonna);
   - se a, b, c, d sono cocircolari: siano (p, q) le coordinate del centro della circonferenza, sia r il suo raggio:
     $$(x_a - p)^2 + (y_a - q)^2 = r^2$$
     ovvero:
     $$-2p\, x_a - 2q\, y_a + x_a^2 + y_a^2 + p^2 + q^2 = 1 \tag{5.1}$$
     Tale relazione vale anche per i punti b, c, d perciò si ha una dipendenza lineare del determinante della matrice, il che provoca $\Delta(a, b, c, d) = 0 \to l(a), l(b), l(c), l(d)$ sono complanari.

   Dimostriamo "$\Leftarrow$": siano $l(a), l(b), l(c), l(d)$ complanari. Se a, b, c, d sono allineati, si ha la tesi. Sia (p, q) il centro della circonferenza per a, b, c ed r il raggio. Allora a, b, c soddisfano l'equazione (5.1). Poiché a, b, c non sono allineati, le tre righe corrispondenti sono linearmente indipendenti $\to d$ soddisfa l'equazione (5.1) poiché $\Delta = 0 \to d$ appartiene alla circonferenza.

2. *Seconda parte.*
   Supponendo che a, b, c costituiscano una sequenza antioraria:

   - $\Delta(a, b, c, d) > 0 \Leftrightarrow l(d)$ sta sopra al piano per i punti $l(a), l(b), l(c) \Leftrightarrow d$ esterno alla circonferenza circoscritta al triangolo abc;
   - $\Delta(a, b, c, d) < 0 \Leftrightarrow l(d)$ sta al di sotto del piano per i punti $l(a), l(b), l(c) \Leftrightarrow d$ interno alla circonferenza circoscritta al triangolo abc

$$\Updownarrow$$

$$\text{InCircle}(a, b, c, d) = \text{vero}$$

Se a, b, c sono in sequenza oraria è possibile fare un ragionamento analogo.

* * *

5.4 Triangolazione di Delaunay

Sia P un insieme finito di punti nel piano.

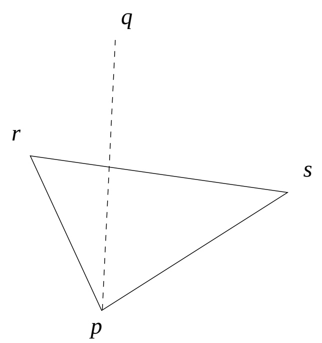
Definizione 34 *Una* triangolazione di Delaunay *di P (indicata con $\mathcal{T}_P$) è una triangolazione ottenuta mediante una suddivisione in triangoli delle facce non triangolari di $\mathcal{D}_P$ (il diagramma di Delaunay di P).*

Teorema 4 Criterio della circonferenza. *Una triangolazione $\mathcal{T}_P$ è una triangolazione di Delaunay di $P \Leftrightarrow$ ogni faccia interna di $\mathcal{T}_P$ è inscritta in una circonferenza P-libera.*

DIMOSTRAZIONE.

- Immediato: se $\mathcal{T}_P$ è una triangolazione di Delaunay $\Rightarrow$ ogni faccia interna è inscritta in una circonferenza P-libera;
- Dimostriamo che: se ogni faccia interna è inscritta in una circonferenza P-libera $\Rightarrow$ $\mathcal{T}_P$ è una triangolazione di Delaunay.

Per assurdo, supponiamo che $\mathcal{T}_P$ non sia una triangolazione di Delaunay. Se ogni spigolo di $\mathcal{D}_P$ appartiene a $\mathcal{T}_P \Rightarrow \mathcal{T}_P$ è una triangolazione di Delaunay. Supponiamo che esista uno spigolo $\overline{pq}$ di $\mathcal{D}_P$ non presente in $\mathcal{T}_P$. Sicuramente $\overline{pq}$ è uno spigolo interno (poiché ogni spigolo del guscio convesso appartiene a $\mathcal{T}_P$).



$\overline{pr}$ = segmento in $\mathcal{T}_P$ più vicino a $\overline{pq}$ in senso antiorario. Sia s il terzo vertice del triangolo di $\mathcal{T}_P$ che giace a destra di $\overline{pr}$;

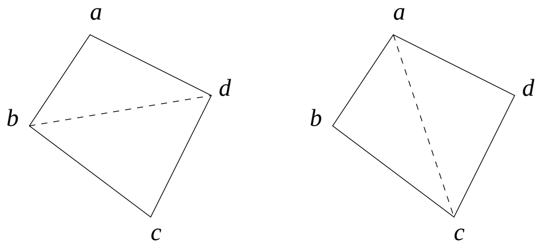
$\overline{rs}$ interseca $\overline{pq}$ in un unico punto interno a entrambi i segmenti.

Poiché $\overline{rs}$ interseca uno spigolo del diagramma di Delaunay($\overline{pq}$), la convessità delle regioni di Delaunay implica che i due estremi r ed s non possono stare nella stessa regione di Delaunay. La circonferenza circoscritta al triangolo $p\widehat{r}s$ è P-libera se e solo se i tre punti stanno sul bordo della stessa faccia di Delaunay. Quindi tale circonferenza non può essere vuota.

* * *

5.4.1 Proprietà dell'angolo

Sia $P = \{a, b, c, d\}$. Sia ρ il quadrilatero formato dai 4 punti di P. Se ρ è convesso, abbiamo due triangolazioni possibili di ρ.



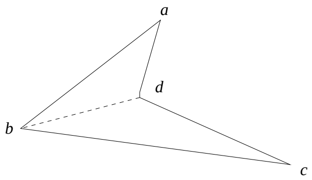
Supponiamo che i test

- InCircle(a, b, c, d),
- InCircle(c, d, a, b)

siano entrambi falsi.

$$\boxed{\hat{a} + \hat{c} \geq \hat{b} + \hat{d}}$$

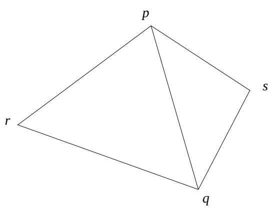
La triangolazione di Delaunay dei vertici di ρ deve utilizzare la diagonale di ρ che connette i due angoli opposti interni la cui somma è massima.
Se ρ non è convesso, la regola è ancora valida (in quanto la diagonale restante è esterna o sul bordo).



Definizione 35 Criterio dell'angolo. *Siano $p\widehat{r}q$ e $p\widehat{s}q$ due facce interne adiacenti di una triangolarizzazione arbitraria. I vertici $prqs$ individuano un quadrilatero ρ, che è un poligono semplice ed ha $\overline{pq}$ come diagonale interna. $\overline{pq}$ soddisfa il criterio dell'angolo*

$$\Updownarrow$$

$$\hat{p} + \hat{q} \geq \hat{s} + \hat{r}$$



Fatto: Le seguenti condizioni sono equivalenti alle regole dell'angolo:

1. $\hat{p} + \hat{q} \geq 180^o$;
2. $\hat{r} + \hat{s} \leq 180^o$;

3. $\neg$InCircle(p, q, r, s);
4. $\neg$InCircle(q, s, p, r).

DIMOSTRAZIONE. Poiché le somme degli angoli interni di $\rho \leq 360^o$:

$$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow \hat{p} + \hat{q} \geq \hat{r} + \hat{s}$$

Inoltre

1. InCircle(p, q, r, s),
2. InCircle(q, s, p, r)

implicano che $\hat{p} + \hat{q} \leq \hat{r} + \hat{s}$.

* * *

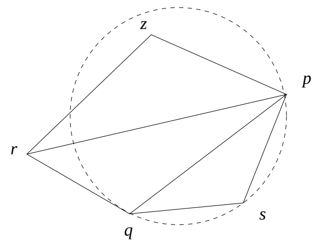
5.4.2 Proprietà dell'angolo forte

La proprietà dell'angolo forte è valida $\Leftrightarrow \hat{p} + \hat{q} > \hat{r} + \hat{s}$.

Lemma 3 *Sia e uno spigolo interno di una triangolazione arbitraria $\mathcal{T}$ di P.*

1. *Se e non soddisfa il criterio dell'angolo $\Rightarrow$ non esiste una triangolazione di Delaunay avente e come spigolo.*
2. *Se e non soddisfa il criterio dell'angolo forte $\Rightarrow$ e non appartiene a $\mathcal{D}_p$.*

Al contrario, può esistere uno spigolo che soddisfi la properità dell'angolo, ma che nessuna triangolazione di Delaunay possa contenerlo. Eccone un controesempio:



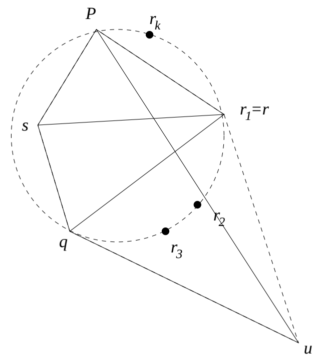
$\overline{pq}$ soddisfa la proprietà dell'angolo.

Lemma 4 *Una triangolazione $\mathcal{T}$ di P è di Delaunay $\Leftrightarrow$ ogni spigolo interno ai $\mathcal{T}$ soddisfa le proprietà dell'angolo.*

DIMOSTRAZIONE.

- Se $\mathcal{T}$ è una triangolazione di Delaunay $\Rightarrow$ ogni spigolo interno soddisfa in criterio dell'angolo (conseguenza del lemma 3).
- Se $\mathcal{T}$ è una triangolazione i cui spigoli interni soddisfano il criterio dell'angolo, allora $\mathcal{T}$ è una tringolazione di Delaunay.

<u>Per assurdo</u>: Supponiamo che esista una faccia $f(p\widehat{s}q)$ la cui circonferenza circoscritta contenga qualche punto di P.



Supponiamo che f ed r siano stati scelti, tra tutte le coppie possibili, in modo tale da rendere massimo l'angolo $q\hat{r}p$. Se $R = \{r_1, \ldots, r_k\}$ è l'insieme dei punti di P che giacciono sull'arco della circonferenza che unisce p a q, è noto che:

$$\forall r_i \in R : q\hat{r}_i p = q\hat{r}p.$$

$\Rightarrow$ ogni punto r_i è interno alla circonferenza passante per p, s, q.
Possiamo affermare che la faccia destra dello spigolo $\overline{pq}$ è $q\widehat{r_i}p$ per qualche $r_i \in R$.

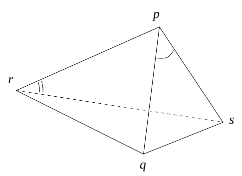
Supponiamo che sia $f_1 = qup$, con u non appartenente ad R, la faccia destra. Il punto u non può essere interno alla circonferenza qpr, altrimenti $q\hat{u}p > q\hat{r}p$. Quindi $\overline{pu}$ interseca $\overline{rq}$ oppure $\overline{pr}$. Nel primo caso $p\hat{r}u > p\hat{r}q$. Inoltre, u è fuori dalla circonferenza pqr, il che implica che r è interno alla circonferenza circoscritta a f_1. Pertanto, f_1 ed r sarebbe una scelta migliore di f ed r; il che porta ad una contraddizione. Nel secondo caso, si può fare un ragionamento analogo. Pertanto $q\widehat{r_i}p$ è faccia destra di $\overline{pq}$.
Possiamo quindi sempre trovare un quadrilatero $pqrs$ tale che r sia interno alla circonferenza circoscritta a psq. Allora:

- InCircle(q, s, p, r) = vero
- InCircle(p, r, q, s) = vero

$\Rightarrow$ $\overline{pq}$ soddisfa il criterio dell'angolo.

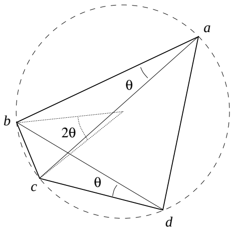
* * *

Definizione 36 Criterio del max-min angolo. *Sia ρ un quadrilatero strettamente convesso. Una triangolazione di Delaunay di ρ deve utilizzare la diagonale che massimizza il <u>più piccolo angolo interno</u> dei due triangoli risultanti.*



Teorema 5 *Il criterio del max-min angolo è localmente equivalmente al criterio della circonferenza.*

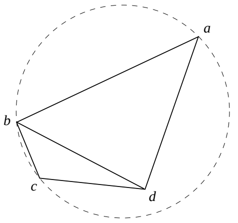
DIMOSTRAZIONE. Siano a, b, c, d punti cocircolari.



$$c\hat{a}b = c\hat{d}b = \theta.$$

Se l'arco bc misura $2\theta \Rightarrow$ ci sono due possibili triangolazioni di ρ anche secondo il criterio del max-min angolo.

Spostando d all'interno della circonferenza, cresce l'ampiezza dell'angolo $c\hat{d}b$, per cui il criterio del max-min angolo indicherà come scelta $\overline{bd}$.



Analogo ragionamento se d è spostato verso l'esterno.

* * *

Lemma 5 *Il criterio del max-min angolo e il criterio dell'angolo sono* equivalenti.

5.4.3 Regola di scambio degli spigoli

Sia $\mathcal{T}$ una triangolazione. La sostituzione di uno spigolo $e = \overline{pq}$, che non soddisfa il criterio dell'angolo, con la diagonale opposta $\overline{rs}$ del quadrilatero $pqrs$, produce una triangolazione $\mathcal{T}_1$ il cui nuovo spigolo soddisfa il criterio dell'angolo.

Applicando *iterativamente* il criterio dell'angolo agli spigoli interni di una triangolazione qualunque fino a che *tutti* gli spigoli interni risultino *localmente ottimali* (vale a dire, soddisfano il criterio dell'angolo), si produce una *triangolazione di Delaunay.*

5.4.4 Interpretazione del criterio dell'angolo

- Una *triangolazione* di un insieme di punti P del piano è la *proiezione* sul piano xy di una superficie poliedrica z-monotona, costituita dalle facce triangolari le cui proiezioni ricoprono il guscio convesso e i cui vertici sono i primi di $l(P)$.

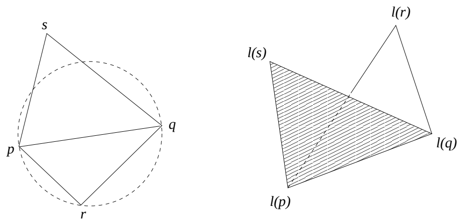
- Uno spigolo $\overline{pq}$ di un quadrilatero $pqrs$ soddisfa la proprietà forte dell'angolo

  $$\Updownarrow$$

  s è fuori dalla circonferenza prq (orientata in senso antiorario)

  $$\Updownarrow$$

  $l(s)$ al di sopra del piano per $l(p)$, $l(r)$, $l(q)$.



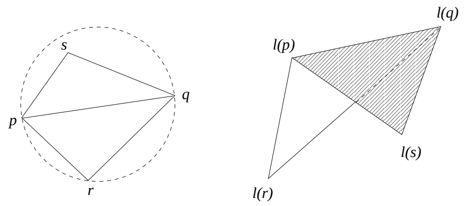
- Uno spigolo $\overline{pq}$ di un quadrilatero $pqrs$ <u>non</u> soddisfa la proprietà forte dell'angolo

$$\Updownarrow$$

s è interno alla circonferenza pqr (orientata in senso antiorario)

$$\Updownarrow$$

$l(s)$ è sotto il piano $l(p)$, $l(r)$, $l(q)$.



5.4.5 Interpretazione della regola dello scambio

Regola di scambio in 2D

Siano abc e acd due triangoli adiacenti in due dimensioni, tali che $abcd$ sia un quadrilatero convesso. Se vale InCircle(a, b, c, d) alora dobbiamo sostituire $\overline{ac}$ con la diagonale opposta db.

Interpretazione in 3D

Se una coppia di trangoli adiacenti nella superficie 3D è "piegata verso il basso" dobbiamo sostituirla con una nuova coppia di triangoli:

$$\begin{array}{c} l(p), l(r), r(q); \quad l(q), l(s), l(p) \\ \Downarrow \\ l(s), l(p), r(r); \quad l(r), l(q), l(s) \end{array}$$