Codifica delle Informazioni

Lezione II bis

Scopo della Lezione

- Richiamare le principali nozioni sulle possibili rappresentazioni dei numeri
- Fare pratica nel manipolare i numeri in rappresentazioni differenti dalla tradizionale base 10.

La Codifica Binaria

- Avendo a disposizione un solo bit si possono rappresentare due elementi diversi:
  - Topolino codifica **0**
  - Pippo codifica **1**
- Con 2 bit si possono rappresentare $4 = 2^2$ elementi diversi, assegnando a ciascuno una codifica diversa:
  - Paperino codifica **00**
  - Qui codifica **01**
  - Quo codifica **10**
  - Qua codifica **11**
- con n bit si possono rappresentare 2^n elementi diversi.

Codifica: Numeri Naturali

- In generale, per un numero composto di *n* cifre si ha che:

$c_{n-1}\ c_{n-2}\ ...c_1\ c_0 =$
$c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + c_{n-2} \cdot 10^{n-2} + ... + c_{n-2}\ ...c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0$

- Si chiamano cifre *più significative* quelle associate ai pesi maggiori.

- La cifra c_{n-1} è la più significativa e c_0 è la cifra meno significativa.

Aritmetica Finita

- Si usa un'aritmetica finita, cioè con un numero massimo di cifre binarie disponibili;
- Siccome il numero di cifre massimo è limitato, la precisione raggiungibile nella rappresentazione dei numeri reali è limitata.
- Nell'aritmetica finita dei calcolatori:
  - i numeri relativi sono rappresentati in complemento;
  - i numeri "reali" sono rappresentati in virgola mobile.

Codifica dei Numeri Naturali

- Con una successione di n bit si rappresentano i 2^n numeri naturali, da 0 a 2^n-1.
- Per i numeri naturali si usano di solito 32 bit, il numero massimo rappresentabile è:
  - $2^{32}-1 = 4.294.967.295 \cong 4 \times 10^9$
- Raddoppiando la lunghezza, il massimo numero rappresentabile aumenta esponenzialmente. Se si utilizzano 64 bit si ha:
  - $2^{64}-1 \cong 1,6 \times 10^{19}$

Sistemi di Numerazione

- Base **2**: quella in cui lavora il calcolatore
  - cifre 0,1
- Base **10**: quella dell'utente umano
  - cifre 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
- Base **8**: per abbreviare i numeri binari
  - cifre 0,1,2,3,4,5,6,7
- Base **16**: per abbreviare (ulteriormente) i binari
  - cifre 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F

Proprietà Notevoli

(pn1) 1 seguito da **n** 0 rappresenta B^n;

ad es.:

```
base  2:   100000 =  2^5
base 10:   100000 = 10^5
base  8:   100000 =  8^5
base 16:   100000 = 16^5
```

(pn2) **n** cifre massime rappresentano B^n-1;

ad es.:

```
base  2:   11111 =  2^5 - 1
base 10:   99999 = 10^5 - 1
base  8:   77777 =  8^5 - 1
base 16:   FFFFF = 16^5 - 1
```

Dalla Rappresentazione al Numero

- **Si applica la definizione**

  $c_n\, c_{n-1} \ldots c_1\, c_0 = c_n \cdot B^n + c_{n-2} \cdot B^{n-1} + \ldots + c_1 \cdot B^1 + c_0 \cdot B^0$

- **Esempi**

  base 2: $1011 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 = 11$

  base 8: $2705 = 2 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 5 = 1477$

  base 16: $3F01 = 3 \cdot 16^3 + 15 \cdot 16^2 + 0 \cdot 16^1 + 1 = 16129$

Dal Numero alla Rappresentazione

- Si usano la divisione intera (div) e il resto (mod), e si applica la proprietà notevole delle rappresentazioni in base B:
  - n mod B è rappresentato dalla cifra c_0 meno significativa della rappresentazione di n in base B
  - n div B è rappresentato dalle cifre precedenti
- Ad es., nella base 10:
  - 1537 mod 10 = 7 è rappresentato da 7
  - 1537 div 10 = 153 è rappresentato da 153
- La rappresentazione emerge attraverso divisioni intere successive, raccogliendo i resti, che corrispondono alle cifre nella nuova base, partendo da quella meno significativa.

Dal Numero alla Rappresentazione

Ad es. per convertire 6 in base 2 si ha:

e si raccolgono i quozienti interi ed i resti come cifre

numero	div base	quoziente	resto	
6	div 2 =	3	0	-significativa
3	div 2 =	1	1	
1	div 2 =	0	1	+significativa

si ripete la divisione intera per 2 finché il quoziente non è zero.

$(6)_{10} = (110)_2$

Le cifre ottenute corrispondono alla rappresentazione binaria

Esercizi

Convertire 251 in base 2: 11111011

quozienti / resti

quozienti		resti
251	2	
125		1
62		1
31		0
15		1
7		1
3		1
1		1
0		1

= 11111011

Convertire 11111011 da base 2: 251

quozienti	resti / coefficienti	coef. 2^i
1111101	1	1
111110	1	2
11111	0	0
1111	1	8
111	1	16
11	1	32
1	1	64
0	1	128

= 251

Esercizi

Convertire 937 in base 7:
2506

base

resti

quozienti		
937	7	
133	6	
19	0	
2	5	
0	2	= 2506

Convertire 2506 da base 7:
937

base

coef. 7^i

quozienti	resti / coefficienti		
2506	7		
250	6	6	
25	0	0	
2	5	245	
0	2	686	= 937

Da Base 2 a Base 8 o 16

- La conversione dalla base 2 alla base 8 può essere fatta per parti, considerando volta per volta una tripla di cifre binarie.
  Es. $(001.010.110.111)_2 = (1267)_8$

- La conversione dalla base 2 alla base 16 può essere fatta per parti, considerando volta per volta una quadrupla di cifre binarie.
  Es. $(0010.1011.0111)_2 = (2B7)_{16}$

- Le basi 8 e 16 sono usate perché hanno delle conversioni dalla base 2 molto semplici.

Base 2: Interi Relativi

- **Codifica con modulo e segno**: si indica il segno seguito dal valore assoluto, come succede normalmente nella codifica decimale.
- Il primo bit indica il segno
  - 0 per positivo
  - 1 per negativo
- Gli altri *n*-1 bit rappresentano il valore assoluto in base binaria.

Base 2: Interi Relativi

Codifica con modulo e segno.

Esempi

```
0011  =     3
0000  =     0
1000  =   - 0
1011  =   - 3
```

Ha il difetto di duplicare la rappresentazione del numero 0, cosa che può complicare l'esecuzione ed il controllo delle operazioni aritmetiche.

Esercizi

Codificare -25 e 25 in base due con modulo e segno:

- serviranno 6 bit (permettono di rappresentare i numeri da -31 a 31).
- in base 2, 25 è (uso il solito algoritmo):

  25 : 2 = 12 resto 1
  12 : 2 = 6 resto 0
  6 : 2 = 3 resto 0
  3 : 2 = 1 resto 1
  1 : 2 = 0 resto 1 = 11001

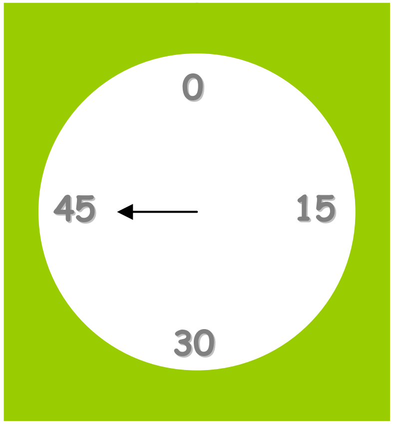
- Considerando il sesto bit per il segno si ha:

  25 = 011001
  -25 = 111001

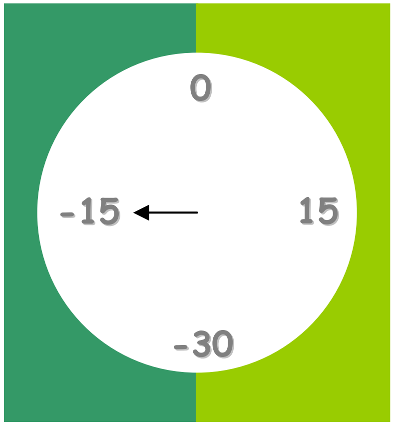
Base 2: Interi Relativi

Rappresentazione in Complemento a 60.

Si ha l'aritmetica dell'orologio senza la lancetta delle ore (segna sempre l'ora zero)



Interi assoluti



negativi: quanto manca all'ora?

da 0 a 59

da 0 a 29 non negativi
da -30 a -1 negativi

Base 2: Interi Relativi

Rappresentazione in complemento a due:

- dati n bit, un numero negativo x si rappresenta con il valore binario corrispondente a 2^n+x $(x<0)$.
- Ad esempio, con successioni di 4 bit
  - 0000 0 1101 − 3 = 10000 - 11
  - 0001 1 1110 − 2 = 10000 - 10
  - 0010 2 1111 − 1 = 10000 - 1

Base 2: Interi Relativi

Es. Complemento a 2 con 3 bit

Se usiamo una cella di 3 bit abbiamo:

000 $\rightarrow_{+1}$ 001 $\rightarrow_{+1}$ 010 $\rightarrow_{+1}$ 011 $\rightarrow_{+1}$ 100 $\rightarrow_{+1}$ 101 $\rightarrow_{+1}$ 110 $\rightarrow_{+1}$ 111 $\rightarrow_{+1}$ 1000;

ma, siccome abbiamo solo 3 bit: 111 $\rightarrow_{+1}$ 000

cioè si torna a 0, come nell'orologio dopo il minuto 59

Dunque una cella di 3 bit è come un orologio con ore di 8 = 2^3 minuti

Esercizi

Rappresentare 2507 e -2507 in complemento a 2:

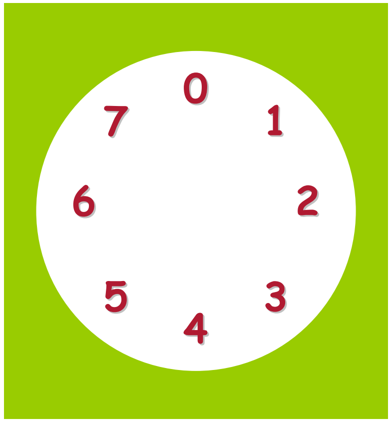
- Quanti bit servono? Deve essere $2507 \leq 2^{n-1}-1$, quindi $n \geq \ln_2(2507+1)+1 \approx 12{,}29$. Quindi basteranno 13 bit.
- 2507 sarà 0 1001 1100 1011 (ottenuto nel solito modo)
- -2507 sarà pari a $2^{13}-2597=$
  = 10 0000 0000 0000 - 1001 1100 1011 =
  = 1 0110 0011 0101

Per la cronaca:

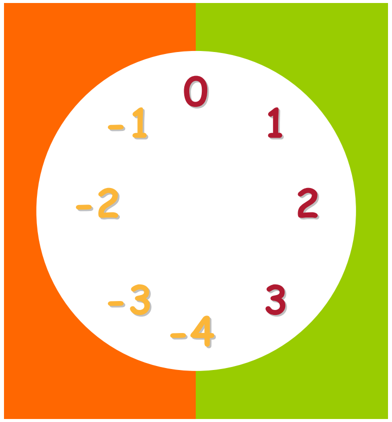
- il conto alla rovescia inizierà con $2^{12}-1=$ 4095 =
  = 0 1111 1111 1111

Base 2: Interi Relativi

Complemento a 2 con 3 bit



Valori assoluti



Valori in complemento;
per gli arancione: quanto manca a 8?