Implementazione del proiettore a raggi-X

1 Il modello ad ombra geometrica

Per poter scrivere un algoritmo che implementi la filtered back projection (FBP) bisogna assumere un modello per la retroproiezione. In effetti lo stesso modello puo' essere usato per la proiezione, ovvero per la creazione di sinogrammi sui quali provare l'efficienza degli algoritmi di FBP. Presentiamo quello ad *ombra geometrica*, adottato dai tomografi in uso attualmente.

La figura 1 rappresenta uno schema semplificato per un tomografo a raggi X (o comunque un tomografo nel quale la propagazione della radiazione puo' essere approssimata a linee rette) i ricettori sono posti parallelamente all'asse y del sistema di riferimento, ad una distanza D dall'origine degli assi O.

Il cerchio inscritto nel quadrato centrato in O (fig. (1)) rappresenta il campo visivo della macchina, cioè l'area all'interno della quale vengono ricostruiti i dati. Si suppone per semplicità che a ruotare sia tale quadrato e non il sistema assi-ricettori: questo, in pratica, corrisponde a supporre che sia il paziente a muoversi in senso circolare e non l'insieme dei detettori. Dal punto di vista dell'astrazione, ciò non ha ovviamente influenza sui risultati ottenibili e sulla validità delle considerazioni.

L'area all'interno del quadrato, ove sarà situata la zona di interesse, è divisa in pixel, il numero dei quali determina la dimensione e la risoluzione della macchina; chiamiamo d la dimensione del lato di un pixel.

Sulla linea dei ricettori ognuno di questi può essere individuato dalla posizione che, una volta fissata la distanza dall'origine, è univocamente determinata dall'ordinata; in realtà i ricettori hanno dimensione finita, quindi corrispondono ad intervalli sull'asse y; per individuare un intervallo è comunque possibile considerare l'ordinata del suo centro.

Un ricettore è detto anche *bin*, che è il corrispondente monodimensionale del pixel (in tre dimensioni si parla invece di *voxel*); per semplicità si assume che la dimensione di un bin sia uguale al lato di un pixel.

Secondo lo schema la più piccola porzione di immagine è rappresentata dal pixel; si può quindi assimilare fin d'ora l'immagine ad una matrice quadrata di dimensione $N \times N$, se $N \times N$ è il numero di pixel in cui questa è divisa.

Alla luce di quanto detto sopra, si può scrivere la trasformazione di coordinate che permette di passare dagli indici della matrice al riferimento (O, x, y);

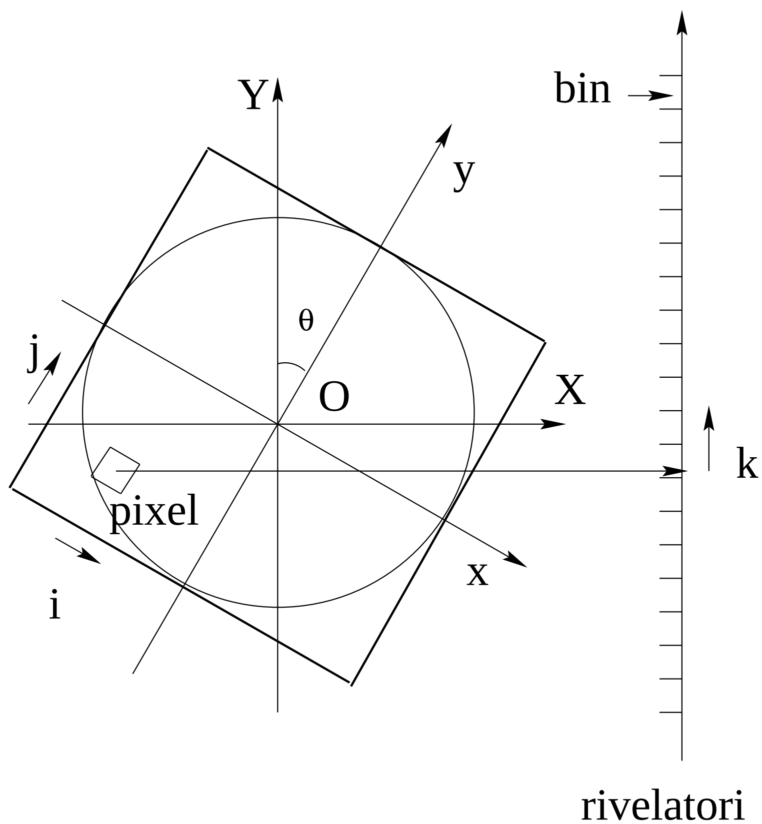

Figura 1: Schema geometrico per il proiettore ad ombra geometrica. Questo modello suppone che la proiezione di un pixel in una certa direzione interessi al più due bins.

le coordinate del centro del pixel $p(i,j)$ (con $i = 0, \cdots, N-1$ e $j = 0, \cdots, N-1$ sono:

$$
\begin{aligned}
x_i &= d(i - \frac{N}{2} + \frac{1}{2}) && (1)\\
y_j &= d(j - \frac{N}{2} + \frac{1}{2}) && (2)
\end{aligned}
$$

Le precedenti equazioni evidenziano la dipendenza delle coordinate x ed y da uno soltanto dei due indici; per gli estremi della matrice valgono quindi

$$
\begin{aligned}
x_0 &= d(\frac{1}{2} - \frac{N}{2}) && (3)\\
x_{N-1} &= d(\frac{N}{2} - \frac{1}{2}) && (4)\\
x_0 &= -x_{N-1} && (5)
\end{aligned}
$$

Gli assi x, y sono solidali all'immagine esaminata e possono essere ottenuti da una rotazione di un angolo θ degli assi fissi X, Y:

$$
\begin{aligned}
X_{i,j} &= x_i \cos\theta + y_j \sin\theta && (6)\\
Y_{i,j} &= -x_i \sin\theta + y_j \cos\theta && (7)
\end{aligned}
$$

Da cui, utilizzando le espressioni ricavate in precedenza per x_i ed y_j:

$$
\begin{aligned}
X_{i,j} &= d(i - \frac{N}{2} + \frac{1}{2}) \cos\theta + d(j - \frac{N}{2} + \frac{1}{2}) \sin\theta && (8)\\
Y_{i,j} &= -d(i - \frac{N}{2} + \frac{1}{2}) \sin\theta + d(j - \frac{N}{2} + \frac{1}{2}) \cos\theta && (9)
\end{aligned}
$$

Il modello ad ombra geometrica suppone che un pixel proietti al più su due bins, la cui determinazione dipende dalla proiezione, intesa questa volta in senso geometrico, del pixel sulla linea dei bins. Il nome del modello deriva dall'analogia tra l'operazione di proiezione geometrica e la produzione di un ombra in una certa direzione.

Il bin in questione può essere individuato tramite l'ordinata del pixel, calcolata rispetto al sistema fisso di assi X, Y. Si osservi a questo proposito che i bins devono essere in numero tale da contenere le proiezioni di tutti i pixel dell'immagine, anche nelle situazioni più sfavorevoli: queste si manifestano in corrispondenza di angoli di 45° e 135°, ossia quando i ricettori devono raccogliere il segnale proveniente dai pixel posti sulla diagonale. Questo puo' essere evitato proiettando (e quindi anche retroproiettando) solo i pixels che stanno all'interno del cerchio inscritto nel quadrato. Questa limitazione non é troppo restrittiva perché la regione di interesse é sempre contenuta nel cerchio in questione. Ció si ottiene quindi con una condizione sui pixel che contribuiscono al sinogramma.

Il centro di un generico bin, sia quello identificato con k (con $k = 0, \cdots, N-1$, ha ordinata $Y_k = d(k - K/2 + 1/2)$ da cui si ricava

$$k = \frac{Y_k}{d} + \frac{K}{2} - \frac{1}{2} \tag{10}$$

Poichè non sempre il centro del bin coincide con l'ordinata del centro del pixel, è necessario riadattare l'equazione precedente al caso in cui non si conosca con precisione tale valore; nel caso in cui $Y_{i,j}$ sia l'ordinata del pixel considerato, per un particolare valore dell'angolo di rotazione, è possibile individuare il bin entro il quale tale valore cade tramite la seguente equazione:

$$k = \frac{Y_{i,j}}{d} + \frac{K}{2} \tag{11}$$

I centri del bin e del pixel coincidono soltanto quando l'angolo di rotazione è un multiplo intero di 90°. Consideriamo ad esempio il caso $\Theta = 0$; per i centri del generico pixel (i,j) si ottengono

$$\begin{aligned} X_{i,j} &= d(i - \frac{N}{2} + \frac{1}{2}) \\ Y_{i,j} &= d(j - \frac{N}{2} + \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

Quindi

$$Y_{i,j} = Y_k = d(k - \frac{N}{2} + \frac{1}{2}) \tag{12}$$

Qualora l'ombra del centro del pixel sia spostata rispetto a quello del bin la distanza fra i due è data da

$$0 \leq \frac{Y_{i,j} - Y_k}{d} < 1 \tag{13}$$

	$\xi = 0$	$\xi < 1$
bin k	0	ξ
bin k+1	1	$1 - \xi$

Tabella 1: Il modello ad ombra geometrica considera la possibilità che i fotoni emessi da un pixel in una direzione raggiungano al più due bins adiacenti; ξ rappresenta la porzione di fotoni che cade su ciascuno di essi.

che vincola la distanza tra i due punti in questione ad essere minore della dimensione di un bin, e può essere risolta in funzione di Y_k utilizzando un'operazione di resto.

Come già detto, nell'ambito del modello si ipotizza che il segnale corrispondente ad un pixel raggiunga al più due ricettori contigui:

$$\xi = \frac{Y_{i,j} - Y_k}{d} \tag{14}$$

da cui, per la (13) si ha

$$0 \leq \xi < 1$$

Una volta determinato il bin k, in cui cade l'ombra del pixel, il peso assegnato alla proiezione sui bin k e $k+1$ è dato dalla tabella 1. Prima di passare alla descrizione dell'algoritmo di retroproiezione è necessaria un'ulteriore precisazione: le cose dette sono utilizzabili per l'implementazione della FBP qualora si assuma, per la densità dei pixel, di essere nell'ambito del modello *concave disk*: se infatti si considerasse una distribuzione di attività uniforme all'interno del pixel, si otterrebbero proiezioni a forma di 'campana', eccetto per angoli multipli di 90°.

Considerando invece il pixel di forma circolare ed assumendo una distribuzione crescente dal centro del pixel alla periferia, in maniera simmetrica rispetto al primo, si possono ottenere proiezioni con andamento costante.

Sia R il raggio del cerchio inscritto in un pixel, q il valore media della densitá di un pixel se si assume come distribuzione

$$d(r) = \frac{2qR}{\pi\sqrt{R^2 - r^2}}$$

e se ne calcolano le proiezioni, si trova per esse il valore costante di $2qR$.

Questa approssimazione è largamente impiegata nell'implementazione di retroproiezioni, poichè consente una notevole semplificazione senza peraltro compromettere la qualità dei risultati ottenibili.

Commentiamo il codice che opera la proiezione

```
for(i=0;i<n;i++)  /* ciclo sui pixel */
   for(j=0;j<n;j++)
/* si considerano solo i pixel nel cerchio inscritto  */
      if ((i-(n-1)/2.)*(i-(n-1)/2.)+(j-(n-1)/2.)*(j-(n-1)/2.)<=(n*n/4.))
      for(m=0;m<nm;m++) /* ciclo sugli angoli */
         {
/* sine[m] e cosine [m] contengono gli angoli precalcolati
   axis e' il centro di rotazione = n/2
   prj e'la proiezione  dell'ordinata del pixel secondo l'eq. 11  */
         prj=((2.*j-n+1.)*cosine[m]-(2.*i-n+1.)*sine[m])/2.+axis;
         k=(int)prj;
         csi=prj-k;
/* si incrementano i due bin vicini con indice k e k+1
   f[i][j] e' il contenuto del pixel di indici i e j */
         pp[m][k]+=(1.-csi)*f[i][j]/nm;
         pp[m][k+1]+=csi*f[i][j]/nm;
         }
```

Analogamente la retroproiezione é implementata nel seguente modo:

```
for(i=0;i<n;i++)    /* ciclo sui pixel */
     for(j=0;j<n;j++)
/* si considerano solo i pixel nel cerchio inscritto  */
     if ((i-(n-1)/2.)*(i-(n-1)/2.)+(j-(n-1)/2.)*(j-(n-1)/2.)<=(n*n/4.))
          for(m=0;m<nm;m++) /* ciclo sugli angoli */
               {
               prj=((2.*j-n+1.)*cosine[m]-(2.*i-n+1.)*sine[m])/2.+axis;
               k=(int)prj;
               csi=prj-k;
/* si incrementa il pixel con i valori dei due bins (k e k+1) pesati
   opportunamente */
               fb[i][j]+=M_PI*((1.-csi)*pp[m][k]+csi*pp[m][k+1])/nm;
               }
```