Numeri complessi

- Definizione e proprietà dei numeri complessi
- Rappresentazione geometrica dei numeri complessi
- Esponenziale di un numero complesso
- Coniugazione di un numero complesso
- Radici N-esime dell’unità

Definizione e proprietà dei numeri complessi

Un numero complesso z é una coppia ordinata di numeri reali: $z = \{ x , y \}$.

Eguaglianza, somma e prodotto di coppie di numeri complessi sono definite da:

- eguaglianza: $z = z'$ se $x=x'$, $y=y'$;

- somma: $z + z' = \{ x , y \} + \{ x' , y' \} = \{ x + x' , y + y' \}$;

- prodotto: $z z' = \{ x , y \} \{ x' ,y' \} = \{ x x' – yy' , x y' + y x' \}$.

Valgono le seguenti proprietà:

- commutatività: $z + z' = z' + z$; $z z' = z' z$;

- associatività: $z + (z' + z'') = (z + z') + z''$; $z (z' z'') = (z z') z''$;

- distributività: $z (z' + z'') = z z' + z z''$.

Il numero complesso $\{ 0 , 0 \}$ gode della proprietà che

$$\{ 0 , 0 \} + \{ x , y \} = \{ x , y \}$$

per ogni numero complesso z; è quindi l'elemento identità della somma. E' detto il numero complesso zero ed è indicato con 0.

Il numero complesso $\{ 1 , 0 \}$ gode della proprietà che

$$\{ 1 , 0 \} \{ x , y \} = \{ x , y \}$$

per ogni numero complesso z; è quindi l'elemento identità del prodotto. E' detto il numero complesso uno ed indicato con 1.

Pertanto i numeri complessi soddisfano a tutti gli assiomi a cui soddisfano i numeri reali. Essi formano un corpo, il corpo dei numeri complessi.

Il negativo di z, - z , è il numero complesso – z = { -x , -y } dato che

{ -x , -y } + { x , y } = { 0 , 0 } .

Infine ogni numero complesso z, diverso da 0, ha un reciproco { u , v } rispetto all' unità tale che:

{ u , v } { x , y } = { 1 , 0 } .

Ciò implica:

x u – y v = 1 , v x + u y = 0 ,

e quindi:

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad , \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad .$$

Il reciproco di z viene indicato con z^{-1}.

Il sottoinsieme dei numeri complessi del tipo { x, 0 } dicesi il sottoinsieme dei numeri REALI. Infatti esso è chiuso rispetto alle operazioni di somma e prodotto; inoltre negativo e reciproco sono dati dal negativo e reciproco del numero reale x. Pertanto non si fa nessuna distinzione tra questo sottoinsime ed il corpo dei numeri reali. Inoltre si possono considerare I numeri complessi come un'estensione dei numeri reali.

Il sottoinsieme dei numeri complessi del tipo { 0 , y } dicesi il sottoinsieme dei numeri IMMAGINARI. Esso è chiuso rispetto alla somma mentre il prodotto di due numeri immaginari è un numero reale dato che:

$\{ 0 , y\} \{ 0 , y'\} = \{ - y y' , 0 \}$.

Le componenti x e y di z vengono dette rispettivamente la PARTE REALE e la PARTE IMMAGINARIA di z ed indicate con $x = Re(z)$, $y = Im(z)$.

Il numero immaginario { 0 , 1 } gode della proprietà che il suo quadrato è eguale al numero reale { -1 , 0}; tale numero viene detto unità immaginaria ed indicato con il simbolo i. Si scrive:

$$i^2 = -1 \ .$$

L'identità

{ x , y } = { x , 0 } + { 0 , 1} { y , 0 }

suggerisce la seguente forma per i numeri complessi:

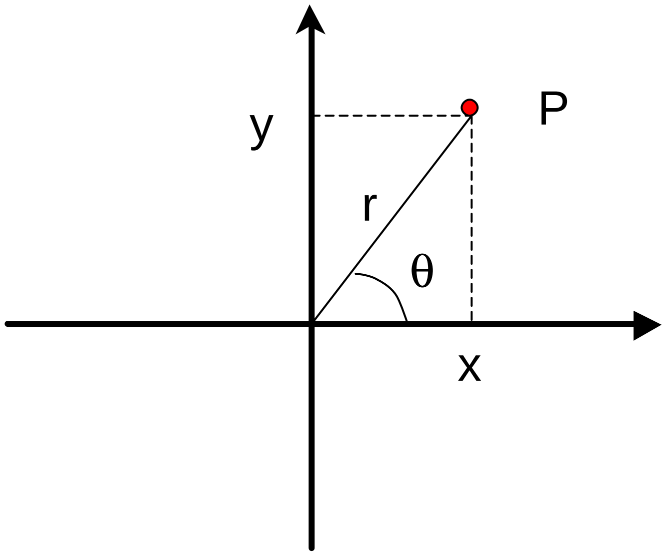
z = x + i y .

OSSERVAZIONE - Tale notazione permette di ottenere la regola per il prodotto usando le regole per il prodotto dei binomi e la proprietà di i:

$$zz' = (x + iy)(x' + iy') = xx' + ixy' + iyx' + i^2 yy' =$$
$$= (xx' - yy') + i(xy' + yx') \ .$$

Rappresentazione geometrica dei numeri complessi

I numeri complessi possono essere posti in corrispondenza con i punti del piano identificando la parte reale di z con l'ascissa del punto corrispondente P e la parte immaginaria di z con l'ordinata di P.



Ciò porta a definire il modulo di z:

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e la fase di z

$$J = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \; .$$

Valgono le relazioni (coordinate polari):

$$x = r \cos J \, , \qquad y = r \sin J \; .$$

Esponenziale di un numero complesso

Dalle precedenti relazioni segue che:

$$z = r(\cos J + i \sin J) = re^{iJ}$$

dove si é posto, per definizione:

$$e^{iJ} = \cos J + i \sin J$$

Valgono le seguenti relazioni:

$$e^{inp} = (-1)^n \quad , \quad e^{i(n+\frac{1}{2})p} = (-1)^n \mathrm{i}$$

ed inoltre:

$$(e^{iJ})' = ie^{iJ} \quad , \quad e^{i(J+J')} = e^{iJ} e^{iJ'}$$

Dimostrazione della formula di derivazione:

$$(e^{iJ})' = -\sin J + i\cos J = i(i\sin J + \cos J) = ie^{iJ} \ .$$

Dimostrazione della formula di fattorizzazione:

$$e^{i(J+J')} = \cos(J+J') + i\sin(J+J') =$$

$$= (\cos J\cos J' - \sin J\sin J') + i(\sin J\cos J' + \cos J\sin J') =$$

$$= (\cos J + i\sin J)(\cos J' + i\sin J') = e^{iJ}e^{iJ'} \ .$$

La formula di fattorizzazione giustifica l’uso della notazione esponenziale. Valgono le seguenti formule:

$$|e^{iJ}| = 1 \ ; \quad zz' = rr'e^{i(J+J')} \ ; \ |zz'| = rr' = |z||z'| \ ;$$

$$z^{-1} = r^{-1}e^{-iJ} \ ; \ z^{n} = r^{n}e^{inJ} \ , \ n \geq 0 \ .$$

Le precedenti formule definiscono l'esponenziale di un numero immaginario. L'esponenziale di un numero complesso arbitrario z può essere definito usando la formula di fattorizzazione e l'espressione dell'esponenziale di un numero immaginario precedentemente introdotta:

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x} e^{iy} = e^{x} (\cos\ y + i \sin\ y) \ .$$

Ne segue che:

$$| e^{z} | = e^{x} \ ;$$

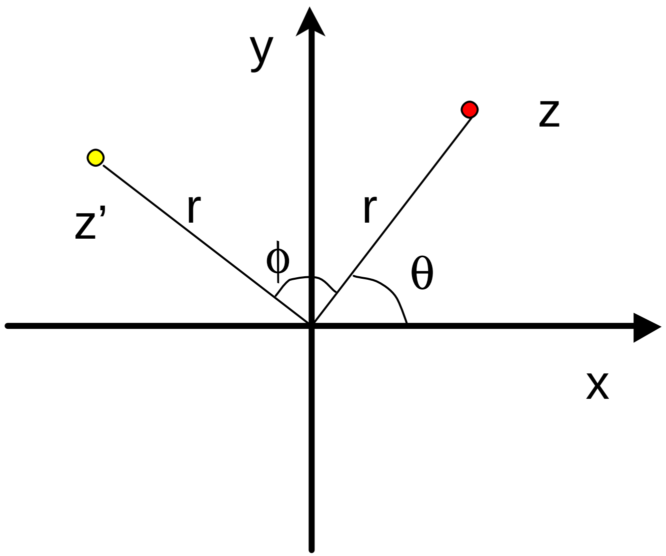
$$e^{z+z'} = e^{(x+x')+i(y+y')} = e^{x+x'} e^{i(y+y')} =$$

$$= e^{x} e^{x'} e^{iy} e^{iy'} = e^{z} e^{z'} \ .$$

Interpretazione geometrica del prodotto di un numero complesso per l'esponenziale di un numero immaginario; poichè si ha:

$$z' = ze^{ij} = re^{iJ}e^{ij} = re^{i(J+j)}$$

ne segue che il numero complesso z' ha lo stesso modulo di z ma è ruotato rispetto a z di un'angolo j .

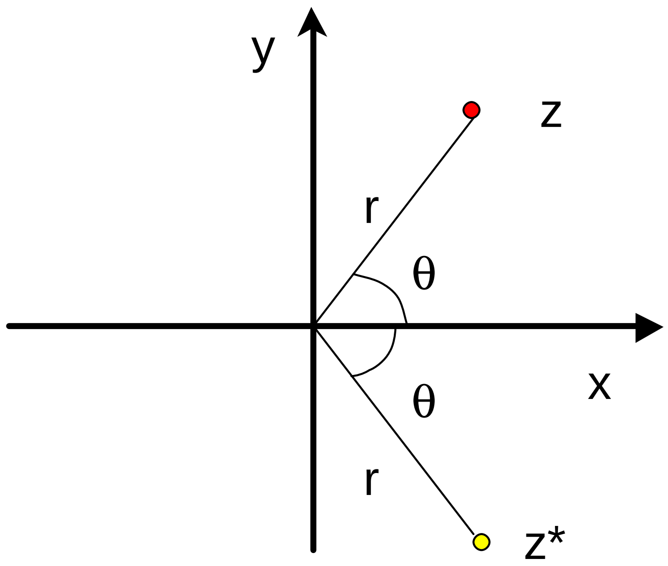


Coniugazione di un numero complesso

Il complesso coniugato di z = x + i y è definito da:

$$z^* = x - i\,y\ ;$$

nel piano z* è il simmetrico di z rispetto all'asse delle ascisse.



Valgono le relazioni:

$$z^* = r\,e^{-i\vartheta}\ ;$$

$$zz^* = |\,z\,|^2\ ;$$

$$\frac{1}{2}(z + z^*) = x \quad ; \qquad \frac{1}{2i}(z - z^*) = y\ .$$

Nel caso dell’esponenzialedi un numero immaginario si ha

$$(e^{iJ})^* = e^{-iJ} = \cos J - i \sin J \quad ,$$

da cui si ottengono le formule di Eulero:

$$\cos J = \frac{1}{2}(e^{iJ} + e^{-iJ}) \qquad , \qquad \sin J = \frac{1}{2i}(e^{iJ} - e^{-iJ}) \quad .$$

Radici N-esime dell'unità

Le radici N-esime dell'unità sono definite come le soluzioni dell'equazione

$$z^N = 1$$

Nel campo reale questa equazione ha solo la soluzione + 1 se N è dispari e le soluzioni + 1 e -1 se N è pari. Nel campo complesso ha sempre N soluzioni. Se si pone:

$$w = e^{i\frac{2p}{N}} \quad ,$$

esse sono date da:

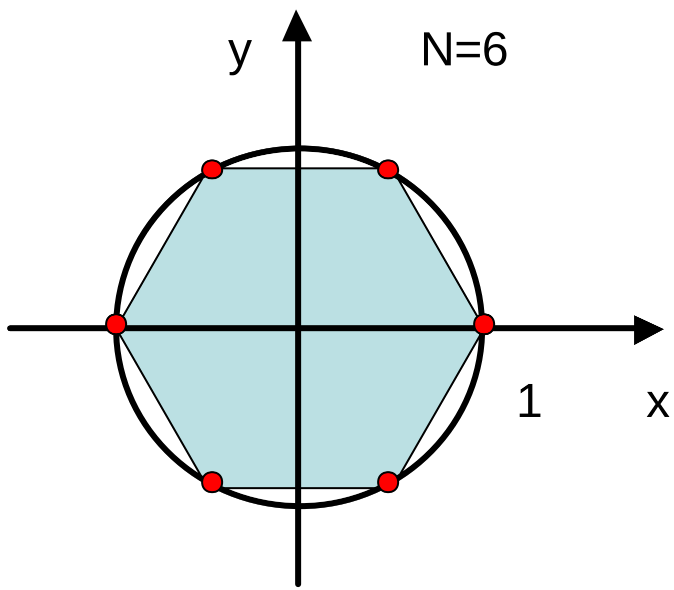
$$z_n = w^n \quad ; \quad n = 0,1,..., N-1 \quad ,$$

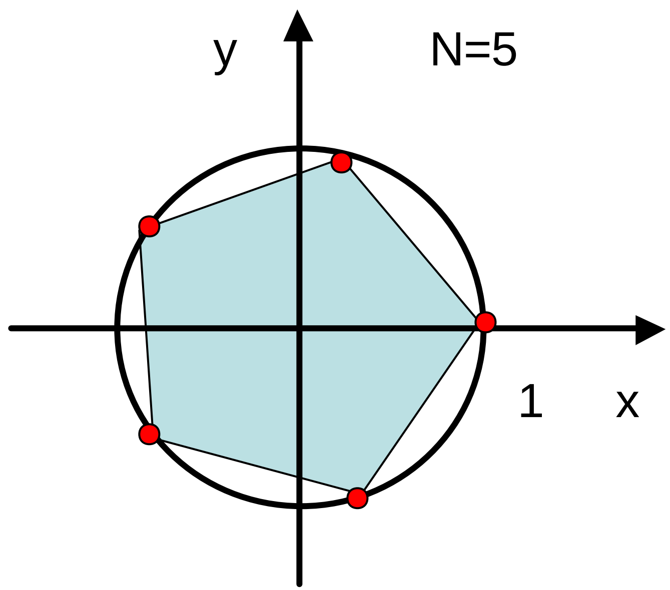
e si ottengono a partire da 1 mediante successive rotazioni dell'angolo $2p \,/\, N$.

Verifica: per ogni N intero e positivo si ha:

$$z_n^{\,N} = w^{nN} = e^{i\left(\frac{2p}{N}\right)nN} = e^{i2pn} = 1 \;.$$

Le radici N-esime dell'unità sono rappresentate da punti equispaziati sul cerchio di raggio 1.





TEOREMA - La somma delle radici N-esime dell'unità è zero:

$$\sum_{n=0}^{N-1} z_n = 0 \quad .$$

DIMOSTRAZIONE - Dall'identità:

$$(1-w)(1+w+w^2+\ldots+w^{N-1}) = 1-w^N \quad ,$$

si ottiene:

$$1+w+w^2+\ldots+w^{N-1} = \frac{1-w^N}{1-w} \quad ,$$

da cui, ponendo:

$$w = e^{i\frac{2p}{N}} \qquad \Rightarrow \qquad w^n = z_n \quad , \quad w^N = 1 \quad ,$$

si ottiene il teorema.