Esercitazione 1: Numeri complessi

Scrivere una libreria di funzioni che calcoli:

- un numero complesso a partire da due numeri reali (parte reale e parte immaginaria);
- il complesso coniugato;
- il modulo;
- la fase;
- l'addizione fra complessi;
- la sottrazione fra complessi;
- la moltiplicazione fra complessi;
- la divisione fra complessi;
- la moltiplicazione fra un reale e un complesso.

Testare quindi le funzioni di libreria preparate sugli esercizi:

1. Esprimere i seguenti numeri complessi nella forma a+ib

   a) $(1+i)^2$ **b)** $\frac{1}{i}$ **c)** $\dfrac{1}{(1+i)}$ **d)** $\dfrac{2+3i}{3-4i}$

   e) $\dfrac{(1+i)}{(1-2i)}$ **f)** i^5+i^{16} **g)** $1+i+i^2+i^3$ **h)** $\frac{1}{2}(1+i)(1+i^{-8})$

2. Calcolare il modulo dei seguenti numeri complessi

   a) $1+i$ **b)** $3+4i$ **c)** $\dfrac{1+i}{(1-i)}$ **d)** $1+i+i^2$

   e) i^7+i^{10} **f)** $2(1-i)+3(2+i)$

3. Calcolare modulo e fase di ciascuno dei seguenti numeri complessi

   a) $2i$ **b)** $-3i$ **c)** -1 **d)** 1

   e) $-3+\sqrt{3}i$ **f)** $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ **g)** $(-1+i)^3$ **h)** $(-1-i)^3$

   i) $\dfrac{1}{(1+i)}$ **j)** $\dfrac{1}{(1+i)^2}$

4. Esprimere ciascuno dei seguenti numeri complessi nella forma a+ib

   a) $e^{\pi i/2}$ **b)** $2e^{-\pi i/2}$ **c)** $3e^{\pi i}$ **d)** $-e^{-\pi i}$

   e) $i+e^{2\pi i}$ **f)** $e^{\pi i/4}$ **g)** $e^{\pi i/4}-e^{-\pi i/4}$ **h)** $\dfrac{1-e^{\pi i/2}}{1+e^{\pi i/2}}$

Numeri complessi: richiami

Definizione: Numero complesso

Un numero complesso z è un numero formato da una *parte reale* e una *parte immaginaria*, abitualmente espresso in forma cartesiana:

$$z = a + ib \quad \text{dove} \quad i = \sqrt{-1} \quad \text{e} \quad i^2 = -1$$

a è chiamata **parte reale** mentre b è la **parte immaginaria**.

I numeri complessi possono essere espressi anche in forma polare:

$$z = re^{i\theta} \quad \text{dove} \quad r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad \theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

r è il **modulo**, θ è la **fase** di z.

Le due rappresentazioni sono legate dalla relazione:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad \to z = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

Definizione: Complesso coniugato

Il complesso coniugato di $z = a + ib$ è $z^* = a - ib$

Regola: Il complesso coniugato può essere calcolato semplicemente cambiando segno alla parte immaginaria nella rappresentazione cartesiana.

Addizione

Dati $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 + ib_2$

$$\to \quad z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

Regola: La parte reale della somma è uguale alla somma delle parti reali. La parte immaginaria della somma è uguale alla somma delle parti immaginarie.

Sottrazione

Dati $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 + ib_2$

$$\to \quad z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

Regola: La parte reale della differenza è uguale alla differenza delle parti reali. La parte immaginaria della differenza è uguale alla differenza delle parti immaginarie.

Moltiplicazione fra complessi

Dati $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 + ib_2$

la moltiplicazione si esegue moltiplicando termine a termine z_1 e z_2.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 \quad = \quad (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) \quad &= \quad a_1 a_2 + i a_1 b_2 + i b_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 \\ &= \quad a_1 a_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) - b_1 b_2 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Regola: La parte reale del prodotto di due complessi è uguale alla differenza fra il prodotto delle parti reali e il prodotto delle parti immaginarie. La parte immaginaria è uguale alla somma dei prodotti $a_1 b_2$ (parte reale del primo per parte immaginaria del secondo) e $a_2 b_1$ (parte reale del secondo per parte immaginaria del primo).

Divisione

Dati $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 + ib_2$

la divisione fra due complessi si calcola moltiplicando numeratore e denominatore per il complesso coniugato del denominatore.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} = \quad \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} &= \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} \qquad = \frac{a_1 a_2 - i a_1 b_2 + i a_2 b_1 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Moltiplicazione fra un reale e un complesso

Dati $z = a + ib$ e $x \in R$

$$\rightarrow \quad xz = x(a + ib) = xa + ixb = (xa) + i(xb)$$

Regola: Si moltiplicano sia la parte reale che la parte immaginaria per il numero reale.

Numeri complessi come strutture

Una struttura è una collezione di variabili (anche di tipo diverso) raggruppate sotto un singolo nome. È un modo conveniente per raccogliere l'informazione *dispersa* su più variabili.

Per esempio l'informazione necessaria a descrivere un numero complesso è completamente racchiusa nelle sue parti reale e immaginaria. Tale informazione può quindi essere raccolta in una struttura:

```
typedef struct FCOMPLEX {
    float   r;
    float   i;
} fcomplex;
```

In questa definizione FCOMPLEX è il nome della struttura, mentre r ed i sono i membri della struttura. Typedef definisce un nuovo tipo di variabile (fcomplex) che può essere utilizzata in tutto il codice al posto del tipo struttura FCOMPLEX.

Ad esempio la dichiarazione

```
fcomplex z;
```

indica che la variabile z è di tipo fcomplex, cioè di tipo struttura FCOMPLEX.

Per avere accesso ai membri della struttura si utilizza l'operatore "."

Parte reale	→	z.r
Parte immaginaria	→	z.i

Esempio: scrivere una funzione che restituisca un numero complesso a partire dalle sue parti reale e immaginaria.

```
fcomplex Complex(re,im)
float re,im;
{
        fcomplex z;
        z.r=re;
        z.i=im;
        return z;
}
```