# Un esempio di DFT calcolabile analiticamente

Si consideri il segnale periodico di lunghezza N cosi' definito per valori dell'indice m nell'intervallo -N/2 + 1 , N/2:

f[m] = 1, m = -M, -M+1,...,0,...,M-1, M ; M < N/2

f[m] = 0, altrimenti.

Pertanto il segnale ha solo 2M+1 componenti diverse da zero.

Tenendo conto della periodicità la DFT può essere definita da:

$$F[k] = \sum_{m=-N/2+1}^{N/2} f[m]\, e^{-i\frac{2\pi k}{N}m} \quad ,$$

e quindi, nel caso particolare considerato, si ha:

$$F[k] = \sum_{m=-M}^{M} e^{-i\frac{2\pi k}{N}} \quad .$$

Si osservi che si ha: F[0] = 2M+1.

E' opportuno scrivere la trasformata nel modo seguente:

$$F[k] = 1 + \sum_{m=1}^{M} e^{-i\frac{2\pi k}{N}m} + \sum_{m=1}^{M} e^{i\frac{2\pi k}{N}m} = \sum_{m=0}^{M} e^{-i\frac{2\pi k}{N}m} + \sum_{m=0}^{M} e^{i\frac{2\pi k}{N}m} - 1 =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left( \sum_{m=0}^{M} e^{i\frac{2\pi k}{N}m} \right) \text{-}1 \;\; ;$$

si calcola allora la sommatoria mediante la formula già piu' volte usata:

$$\sum_{m=0}^{M} e^{i\frac{2\pi k}{N}} = \frac{1 - e^{i\frac{2\pi}{N}(M+1)k}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{N}k}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{N}(M+1)k}\left( e^{i\frac{\pi}{N}(M+1)k} - e^{-i\frac{\pi}{N}(M+1)k} \right)}{e^{i\frac{\pi}{N}k}\left( e^{i\frac{\pi}{N}k} - e^{-i\frac{\pi}{N}k} \right)} =$$

$$= e^{i\frac{\pi}{N}M\,k} \frac{\sin[\frac{\pi}{N}(M+1)k]}{\sin[\frac{\pi}{N}k]} \quad .$$

Sostituendo nell'espresione per F[k] si ottiene:

$$F[k] = 2\frac{\cos(\frac{\pi M}{\mathrm{N}}k)\sin[\frac{\pi}{N}(M+1)k]}{\sin(\frac{\pi}{N}k)} - 1 \quad ,$$

da cui, utilizzando la formula:

$$2 \sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b) \quad ,$$

si giunge al risultato finale:

$$F[k] = \frac{\sin[\frac{\pi}{N}(2M+1)k]}{\sin(\frac{\pi}{N}k)} \quad .$$

Si osservi che F[k] ha il massimo assoluto per k=0, N; ha un andamento oscillante e decrescente con ''zeri'' (piu' esattamente cambiamenti di segno) spaziati circa di N/(2M+1): piu' è ''largo'' il segnale, piu' ''stretto'' diventa il massimo principale della sua DFT.