Esercitazione 1: Numeri complessi

Scrivere una libreria di funzioni che calcoli:

- un numero complesso a partire da due numeri reali (parte reale e parte immaginaria);
- il complesso coniugato;
- il modulo (Es. $z = 3 + 4i$);
- la fase (Es. $z = -3 + \sqrt{3}i$);
- parte reale e parte immaginaria noti modulo e fase (Es. $z = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$);
- l'addizione fra complessi (Es. $z_1 = 2 - 2i \quad z_2 = 6 + 3i$);
- la sottrazione fra complessi (Es. $z_1 = 2 - 2i \quad z_2 = 6 + 3i$);
- la moltiplicazione fra complessi (Es. $z_1 = 0.5 + 0.5i \quad z_2 = 1 + i$);
- la divisione fra complessi (Es. $z_1 = 2 + 3i \quad z_2 = 3 - 4i$);
- la moltiplicazione fra un reale e un complesso (Es. $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad z = 1 + i$).

Testare quindi le funzioni di libreria preparate su alcuni esempi più complessi:

1. Calcolare

   a) $1 + i + i^2 + i^3$ **b)** $\frac{1}{2}(1 + i)(1 + i^{-8})$

2. Trasformare i seguenti numeri complessi dalla forma cartesiana a quella polare:

   a) $(-1 - i)^3$ **b)** $\dfrac{1}{(1 + i)^2}$

3. Trasformare i seguenti numeri complessi dalla forma polare a quella cartesiana:

   a) $e^{\pi i/4} - e^{-\pi i/4}$ **b)** $\dfrac{1 - e^{\pi i/2}}{1 + e^{\pi i/2}}$

Numeri complessi: richiami

Definizione: Numero complesso

Un numero complesso z è un numero formato da una *parte reale* e una *parte immaginaria*, abitualmente espresso in forma cartesiana:

$$z = a + ib \quad \text{dove} \quad i = \sqrt{-1} \quad \text{e} \quad i^2 = -1$$

a è chiamata **parte reale** mentre b è la **parte immaginaria**.

I numeri complessi possono essere espressi anche in forma polare:

$$z = re^{i\theta} \quad \text{dove} \quad r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad \theta = \mathrm{arctg}\frac{b}{a}$$

r è il **modulo**, θ è la **fase** di z.

La fase θ può essere calcolata con la relazione precedente solo se $a \neq 0$. Nel caso in cui $a = 0$ per la fase vale:

$$\begin{array}{ll} \theta = \frac{\pi}{2} & \text{se} \quad b > 0 \\ \theta = -\frac{\pi}{2} \;\; (\theta = \frac{3}{2}\pi) & \text{se} \quad b < 0 \end{array}$$

Le due rappresentazioni sono legate dalla relazione:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad \rightarrow z = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

$$\begin{array}{c} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{array}$$

Definizione: Complesso coniugato

Il complesso coniugato di $z = a + ib$ è $z^* = a - ib$

Regola: Il complesso coniugato può essere calcolato semplicemente cambiando segno alla parte immaginaria nella rappresentazione cartesiana.

Addizione

Dati $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 + ib_2$

$$\rightarrow \quad z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

Regola: La parte reale della somma è uguale alla somma delle parti reali. La parte immaginaria della somma è uguale alla somma delle parti immaginarie.

Sottrazione

Dati $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 + ib_2$

$$\rightarrow \quad z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

Regola: La parte reale della differenza è uguale alla differenza delle parti reali. La parte immaginaria della differenza è uguale alla differenza delle parti immaginarie.

Moltiplicazione fra complessi

Dati $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 + ib_2$

la moltiplicazione si esegue moltiplicando termine a termine z_1 e z_2.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) &&= a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + i^2 b_1b_2 \\ & &&= a_1a_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1) - b_1b_2 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad z_1 z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$$

Regola: La parte reale del prodotto di due complessi è uguale alla differenza fra il prodotto delle parti reali e il prodotto delle parti immaginarie. La parte immaginaria è uguale alla somma dei prodotti a_1b_2 (parte reale del primo per parte immaginaria del secondo) e a_2b_1 (parte reale del secondo per parte immaginaria del primo).

Divisione

Dati $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 + ib_2$

la divisione fra due complessi si calcola moltiplicando numeratore e denominatore per il complesso coniugato del denominatore.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} &= \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1a_2 - ia_1b_2 + ia_2b_1 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} \\ &= \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Moltiplicazione fra un reale e un complesso

Dati $z = a + ib$ e $x \in R$

$$\rightarrow \quad xz = x(a + ib) = xa + ixb = (xa) + i(xb)$$

Regola: Si moltiplicano sia la parte reale che la parte immaginaria per il numero reale.

Numeri complessi come strutture

Una struttura è una collezione di variabili (anche di tipo diverso) raggruppate sotto un singolo nome. È un modo conveniente per raccogliere l'informazione *dispersa* su più variabili.

Per esempio l'informazione necessaria a descrivere un numero complesso è completamente racchiusa nelle sue parti reale e immaginaria. Tale informazione può quindi essere raccolta in una struttura:

```
typedef struct FCOMPLEX {
    float    r;
    float    i;
} fcomplex;
```

In questa definizione FCOMPLEX è il nome della struttura, mentre r ed i sono i membri della struttura. Typedef definisce un nuovo tipo di variabile (fcomplex) che può essere utilizzata in tutto il codice come sinonimo del tipo struttura FCOMPLEX.

Ad esempio la dichiarazione

```
fcomplex z;
```

indica che la variabile z è di tipo fcomplex, cioè di tipo struttura FCOMPLEX.

Per avere accesso ai membri della struttura si utilizza l'operatore "."

Parte reale	$\rightarrow$	z.r
Parte immaginaria	$\rightarrow$	z.i

Esempio: scrivere una funzione che restituisca un numero complesso a partire dalle sue parti reale e immaginaria.

```
fcomplex Complex(re,im)
float re,im;
{
        fcomplex z;
        z.r=re;
        z.i=im;
        return z;
}
```