Trasformata di Fourier discreta (Discrete Fourier Transform – DFT)

- Discretizzazione della serie di Fourier
- Definizione e proprietà della DFT
- DFT di segnali traslati
- Un esempio di DFT
- Formula di inversione della DFT
- DFT reale
- Trasformata coseno discreta (DCT)
- Trasformata seno discreta (DST)
- Trasformata coseno quarto d'onda

1 - Discretizzazione della serie di Fourier

Si consideri un segnale periodico x(t), di periodo T, rappresentato dalla serie di Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i 2 p k \frac{t}{T}} \qquad , \qquad c_k = \int_0^T x(t) e^{-i 2 p k \frac{t}{T}} \quad .$$

Per calcolare i coefficienti di Fourier c_k si può ricorrere ad una formula di quadratura. Si supponga di suddividere l'intervallo [0,T] in N intervalli eguali mediante i punti:

$$t_n = \frac{T}{N} n \qquad ; \qquad n = 0,1,\ldots\ldots, N-1 \quad .$$

Si può allora approssimare l'integrale di una funzione h(t) su [0,T] mediante la somma di termini che si ottengono moltiplicando il valore di h(t) in un punto t_n per la lunghezza dell'intervallo adiacente.

Si usa quindi l'approssimazione:

$$\int_0^T h(t)\,dt \;\cong\; \sum_{n=0}^{N-1} h(t_n)\frac{T}{N} \qquad .$$

Ne segue la seguente approssimazione per i coefficienti di Fourier:

$$c_{N,k} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(t_n)\, e^{-i\frac{2p}{N}kn} \qquad .$$

Da questa espressione segue che si ottengono solo N coefficienti tra loro distinti; dalla relazione:

$$e^{-i\frac{2p}{N}(k\pm N)n} = e^{-i\frac{2p}{N}kn} \qquad ,$$

segue infatti che:

$$c_{N,k\pm N} = c_{N,k} \qquad .$$

Se si pone:

$$F[k] = Nc_{N,k} \qquad , \qquad f[n] = x(t_n) \qquad ,$$

di modo che:

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]\, e^{-i\frac{2p}{N}kn} \qquad , \qquad (1)$$

mediante gli N coefficienti di Fourier cosi' calcolati si può ottenere una approssimazione a N termini del segnale di partenza. Ammettendo che N sia pari, si può scrivere:

$$x_N(t_n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F[k]\, e^{i\frac{2p}{N}nk} \cong x(t_n) = f[n] \qquad .$$

Qui si è supposto di calcolare il segnale solo nei punti t_n . Si osservi che la frequenza massima legata alla distanza di campionamento è data da:

$$\Omega = \frac{p}{dt} = N\frac{p}{T} = \frac{N}{2}\frac{2p}{T} \quad ,$$

e pertanto l'armonica massima è N/2 volte l'armonica fondamentale.

Un risultato importante della teoria della trasformata di Fourier discreta è che la precedente somma non dà solamente una approsimazione dei valori del segnale di partenza ma **restituisce esattamente** tali valori. Se si osserva inoltre che gli F[k] formano una successione periodica con periodo N e che anche gli esponenziali nella sommatoria sono eriodici in k con periodo N, si potrà scrivere:

$$f[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{i\frac{2p}{N}nk} \qquad . \qquad (2)$$

Infatti, se si ha una successione periodica, la somma dei suoi valori su un qualunque intervallo periodo (di lunghezza N) non dipende dall'intervallo in questione.

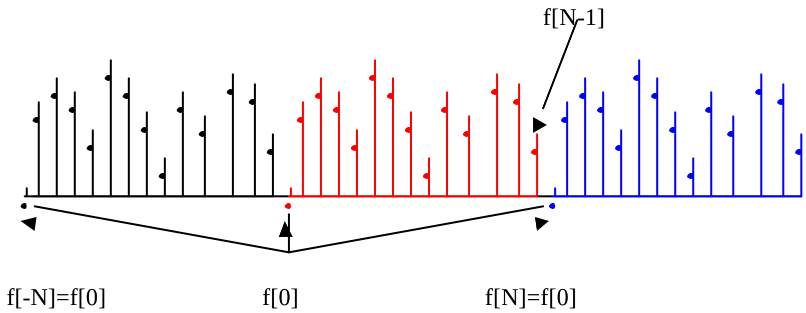
La (1) costituirà la definizione della **trasformata di Fourier discreta** mentre la (2) sarà detta la sua formula di inversione.

Premessa

Sia f un segnale campionato, rappresentato da un vettore di lunghezza N con componenti

f [0] , f [1] , ... , f [N-1] ;

nella teoria della DFT occorre considerare il segnale prolungato in un segnale periodico con periodo N. Così f[m] è definito per ogni m, con la proprietà f [m+N] = f [m-N] = f [m].



2 - Definizione e proprietà della DFT

La trasformata di Fourier discreta di un segnale periodico f di periodo N è la successione periodica F, anche di periodo N, definita da:

$$F[k] = \sum_{m=0}^{N-1} f[m] e^{-i\frac{2pk}{N}m}$$

per ogni k ed in particolare per k = 0, 1, ... ,N-1.

Verifica della periodicità:

$$F[k \pm N] = \sum_{m=0}^{N-1} f[m] e^{-i\frac{2p}{N}(k \pm N)m} = \sum_{m=0}^{N-1} f[m] e^{-i\frac{2pk}{N}m} e^{\mp i2pm} =$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} f[m] e^{-i\frac{2pk}{N}m} = F[k] \quad .$$

La DFT di un segnale REALE soddisfa alle condizioni:

$$F^*[k] = F[-k] = F[N-k] \ .$$

DIMOSTRAZIONE:

$$F^*[k] = \left(\sum_{m=0}^{N-1} f[m] e^{-i\frac{2p}{N}km}\right)^* = \sum_{m=0}^{N-1} f^*[m] e^{i\frac{2p}{N}km} =$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} f[m] e^{i\frac{2p}{N}km} = F[-k].$$

La seconda relazione segue dalla periodicità del segnale.

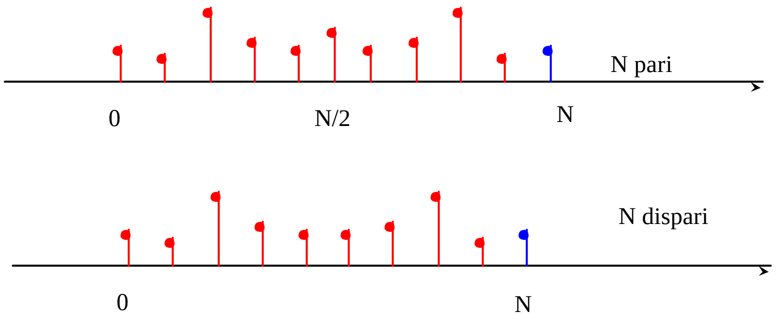
Un segnale periodico f si dice PARI se soddisfa la condizione:

$$f[-m] = f[m] ;$$

pertanto, all'interno dell'intervallo periodo {0, 1, …, N-1}, si ha:

$$f[N-m] = f[m] .$$

Se N è dispari il segnale contiene (N+1)/2 valori distinti; N/2+1 se N è pari.



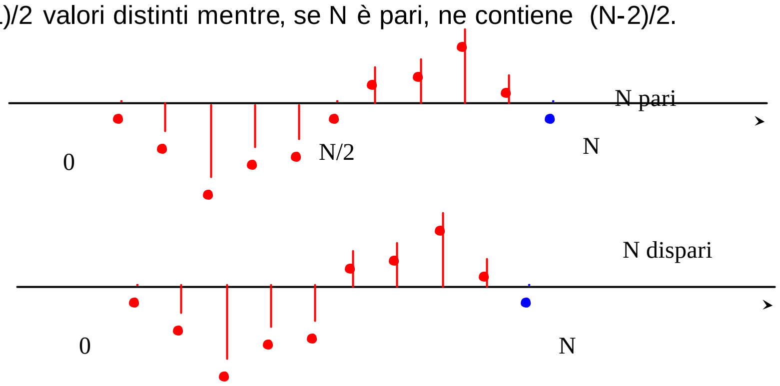
Un segnale periodico f si dice DISPARI se soddisfa la condizione:

$$f[-m] = - f[m] ;$$

pertanto, all'interno dell'intervallo periodico {0, 1, …, N-1}, si ha:

$$f[N-m] = - f[m] .$$

Si ha: f[0] = - f[N] = - f[0] e quindi f[0] =0; se N è pari, si ha anche f[N/2] = 0. Ne segue che, se N è dispari, il segnale contiene, a parte il segno, (N-1)/2 valori distinti mentre, se N è pari, ne contiene (N-2)/2.



La DFT di un segnale PARI è PARI mentre la DFT di un segnale DISPARI è DISPARI.

DIMOSTRAZIONE: Se f è pari, si ha:

$$F[-k] = \sum_{m=0}^{N-1} f[m]\, e^{i\frac{2\pi}{N}km} = \sum_{m'=0}^{1-N} f[-m']\, e^{-i\frac{2\pi}{N}km'} =$$

$$= \sum_{m'=0}^{1-N} f[m']\, e^{-i\frac{2\pi}{N}km'} = \sum_{m'=0}^{N-1} f[m']\, e^{-i\frac{2\pi}{N}km'} = F[k]\ .$$

L'ultima eguaglianza deriva dall'osservazione, già fatta, che la somma su un intervallo periodo dei valori di una successione periodica non dipende dall'intervallo.

In modo analogo si dimostra la seconda parte della proposizione.

Se f è un segnale REALE e PARI allora anche la sua DFT è reale e pari; se f è un segnale REALE e DISPARI allora la sua DFT è IMMAGINARIA e DISPARI.

Per quanto riguarda la prima parte della proposizione si ha:

$$F^*[k] = F[-k] = F[k]\ .$$

In modo analogo si ottiene la seconda parte:

$$F^*[k] = F[-k] = -F[k]\ .$$

QUADRO RIASSUNTIVO DELLE PROPRIETA' DI SIMMETRIA:

segnale REALE	DFT
f[m] = f*[m]	F*[k] = F[-k]
segnale PARI	DFT PARI
f[m] = f[-m]	F[k] = F[-k]
segnale DISPARI	DFT DISPARI
f[m] = - f[-m]	F[k] = - F[-k]
segnale REALE e PARI	DFT REALE e PARI
f[m] = f*[m] = f[-m]	F[k] = F*[k] = F[-k]
segnale REALE e DISPARI	DFT IMMAGINARIA e DISPARI
f[m] = f*[m] = - f[-m]	F[k] = - F*[k] = - F[-k]

3 - DFT di segnali traslati

Sia p un intero ed f un segnale periodico; si dice p-TRASLATO di f il segnale periodico definito da:

$$f_p[m] = f[m - p] \ .$$

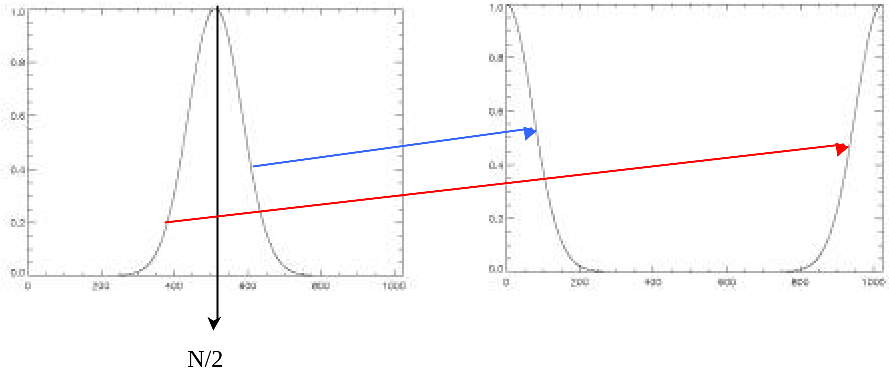
Usando anche la condizione di periodicità:

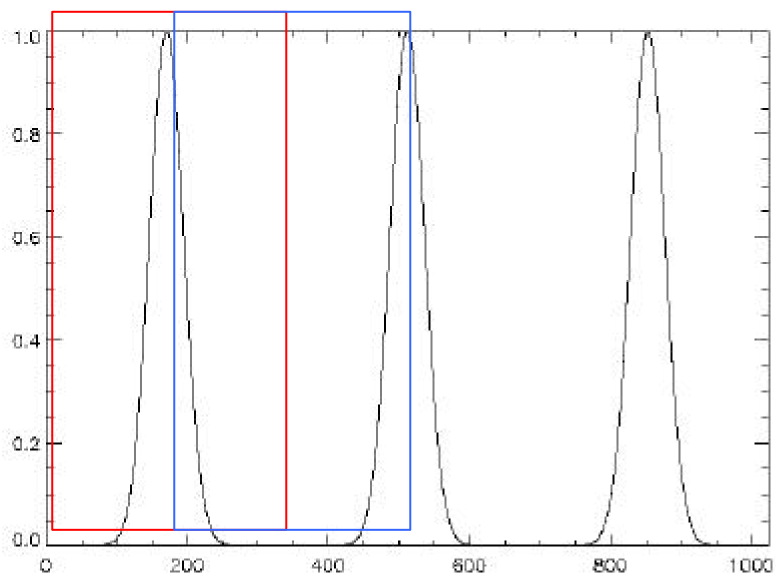
$$f_p[m] = f[N + m - p] \ ,$$

si vede che, nell'intervallo periodo di partenza { 0, 1, …, N-1}, l'effetto di una p-traslazione di f consiste nel porre nelle posizioni { 0, 1, …, p-1} i valori di f nelle posizioni { N-p, N-p+1, …, N-1} e nelle posizioni { p, p+1, …, N-1} i valori di f nelle posizioni { 0, 1, …, N-p-1}. Pertanto una p-traslazione è equivalente ad una PERMUTAZIONE CICLICA dei valori di f sull'intervallo fondamentale.

Se N è pari e p = N/2, si ottiene il RIBALTAMENTO del segnale: i valori di f nelle seconde N/2 posizioni vengono posti nelle prime N/2, mentre i valori nelle prime N/2 posizioni vengono posti nelle seconde N/2.

Esempio di ribaltamento di un segnale





Teorema - La DFT del p-traslato di f è data da:

$$F_p[k] = e^{-i\frac{2p}{N}pk} F[k] \quad .$$

Dimostrazione – Si ha:

$$F_p[k] = \sum_{m=0}^{N-1} f[m-p]\, e^{-i\frac{2p}{N}km} = \sum_{m'=-p}^{N-1-p} f[m']\, e^{-i\frac{2p}{N}k(m'+p)} =$$

$$= e^{-i\frac{2p}{N}pk} \sum_{m'=0}^{N-1} f[m']\, e^{-i\frac{2p}{N}km'} = e^{-i\frac{2p}{N}pk} F[k] \quad ,$$

dove si è usato ancora una volta il fatto che la somma su un intevallo periodo non dipende dall'intervallo.

OSSERVAZIONE – Nel caso particolare di N pari e p = N/2, si ha

$$F_{N/2}[k] = (-1)^k F[k] \quad .$$

4 - Un esempio di DFT

Si consideri il segnale periodico di lunghezza N cosi' definito per valori dell'indice m nell'intervallo -N/2 + 1 , N/2:

f[m] = 1, m = -M, -M+1,...,0,...,M-1, M ; M < N/2

f[m] = 0, altrimenti.

Pertanto il segnale ha solo 2M+1 componenti diverse da zero.

Tenendo conto della periodicità la DFT può essere definita da:

$$F[k] = \sum_{m=-N/2+1}^{N/2} f[m]\, e^{-i\frac{2p}{N}km} \quad ,$$

e quindi, nel caso particolare considerato, si ha:

$$F[k] = \sum_{m=-M}^{M} e^{-i\frac{2p}{N}km} .$$

Si osservi che si ha: F[0] = 2M+1.

E' opportuno scrivere la trasformata nel modo seguente:

$$F[k] = 1 + \sum_{m=1}^{M} e^{-i\frac{2p}{N}km} + \sum_{m=1}^{M} e^{i\frac{2p}{N}km} = \sum_{m=0}^{M} e^{-i\frac{2p}{N}km} + \sum_{m=0}^{M} e^{i\frac{2p}{N}km} - 1 \quad =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{m=0}^{M} e^{i\frac{2p}{N}km}\right) - 1;$$

si calcola allora la sommatoria mediante la formula già piu' volte usata:

$$\sum_{m=0}^{M} e^{i\frac{2p}{N}km} = \frac{1 - e^{i\frac{2p}{N}(M+1)k}}{1 - e^{i\frac{2p}{N}k}} = \frac{e^{i\frac{p}{N}(M+1)k}\left(e^{i\frac{p}{N}(M+1)k} - e^{-i\frac{p}{N}((M+1))k}\right)}{e^{i\frac{p}{N}k}\left(e^{i\frac{p}{N}k} - e^{-i\frac{p}{N}k}\right)} =$$

$$= e^{i\frac{p}{N}Mk} \frac{\sin\left[\frac{p}{N}(M+1)k\right]}{\sin\left[\frac{p}{N}k\right]}.$$

Sostituendo nell'espresione per F[k] si ottiene:

$$F[k] = 2\frac{\cos\left(\frac{p\,M}{N}k\right)\sin\left[\frac{p}{N}(M+1)k\right]}{\sin\left(\frac{p}{N}k\right)} - 1\ ,$$

da cui, utilizzando la formula:

$$2 \sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b) \quad ,$$

si giunge al risultato finale:

$$F[k] = \frac{\sin\left[\frac{p}{N}(2M+1)k\right]}{\sin\left(\frac{p}{N}k\right)} \quad .$$

Si osservi che F[k] ha il massimo assoluto per k=0, N; ha un andamento oscillante e decrescente con ''zeri'' (piu' esattamente cambiamenti di segno) spaziati circa di N/(2M+1): piu' è ''largo'' il segnale, piu' ''stretto'' diventa il massimo principale della sua DFT.

5 - Formula di inversione della DFT

In diverse operazioni di elaborazione di segnali si effettuano operazioni sulla sua DFT; si pone allora il problema di sapere quale segnale corrisponde alla DFT elaborata. Più in generale si pone il problema di sapere se la DFT di un segnale contiene un'informazione completa sul segnale medesimo, o, in altre parole, se è possibile ricostruire il segnale a partire dalla sua DFT.

La risposta a questo problema è data dalla formula di inversione della DFT che assume la forma seguente:

$$f[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{i\frac{2p\ k}{N}m} \quad .$$

A parte il fattore 1/ N, si noti la simmetria tra definizione ed inversione dela DFT: si ottengono l'una dall'altra cambiando i in –i ad esponente.

Dimostrazione - La formula di inversione è una diretta conseguenza del fatto che la somma delle radici N-esime dell'unità è zero. Se si indica con h[m] il secondo membro della formula di inversione precedentemente data, sostituendovi la formula della DFT si ha:

$$h[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m'=0}^{N-1} f[m'] e^{-i\frac{2p}{N}km'} \right) e^{i\frac{2p}{N}km} =$$

$$= \sum_{m'=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2p}{N}(m-m')k} \right) f[m'] = \sum_{m'=0}^{N-1} S[m, m'] f[m'] \ ,$$

dove si è posto:

$$S[m, m'] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2p}{N}(m-m')k} \quad .$$

Per m = m' si ha S[m , m] = 1 mentre per m diverso da m' si ha: S[m , m'] = 0.

Quest'ultima proprietà deriva dal Teorema sulla somma delle radici N-esime dell'unità dato che, al variare di k, i termini della sommatoria percorrono tutte le radici N-esime. Si può comunque ripetere la dimostrazione di quel Teorema ponendo

$$w = e^{i\frac{2p}{N}(m-m')} \quad .$$

Si può anche scrivere:

$$S[m,m'] = d[m,m'] \ ,$$

dove si è introdotto il simbolo di Kronecker $d[m,m']$ che è eguale a 1 per m = m' ed eguale a zero altrimenti. La condizione suddetta è anche detta condizione di ortogonalità.

Ne segue ovviamente che h[m] = f[m].

Supponiamo che N sia pari. Se si introducono i seguenti segnali periodici:

$$w_k[m] = e^{i\frac{2p}{N}km} \quad ; \quad k = 0,1,...,\ N-1 \ ,$$

la formula di inversione puo' essere scritta nella forma seguente:

$$f[m] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F[k]\, w_k[m] \ ,$$

e quindi il segnale periodico f[m] è una combinazione lineare dei segnali periodici $w_k[m]$. Questi godono delle proprietà:

$$w_0[m] = 1 \qquad ; \qquad w_{\frac{N}{2}}[m] = (-1)^m$$

$$w_{N-k}[m] = e^{i\frac{2p\,(N-k)}{N}m} = e^{-i\frac{2p}{N}km} = v_{-k}[m] \ ; \ k = 1,...,\frac{N}{2}-1 \ .$$

Per k = 1, 2, ..., N/2-1 si ha:

$$w_k[m] = \cos\left(\frac{2p}{N}km\right) + i\sin\left(\frac{2p}{N}km\right) \; .$$

Pertanto per k=1 si ha l'armonica fondamentale mentre per gli altri valori di k si ottengono le armoniche superiori. Quella di frequenza massima corrisponde a k = N/2.

Con le precedenti notazioni si può anche scrivere la formula di inversione della DFT nella forma seguente:

$$f[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=-(\frac{N}{2}-1)}^{\frac{N}{2}} F[k]\, w_k[m] \quad .$$

6 – DFT reale

Nel caso di un segnale reale $f[m]$ ed N pari la DFT complessa può essere rimpiazzata dalle seguenti trasformate reali:

$$A[k] = \mathrm{Re}\ F[k] = \sum_{m=0}^{N-1} f[m]\cos\left(\frac{2p}{\mathrm{N}}km\right);\ k = 0,...,\frac{N}{2};$$

$$\mathrm{B}[\mathrm{k}] = \mathrm{Im}\ F[k] = \sum_{m=1}^{N-1} f[m]\sin\left(\frac{2p}{\mathrm{N}}km\right);\ k = 1,...,\frac{N}{2}-1$$

per le quali vale la formula di inversione:

$$f[m] = \frac{1}{N}A[0] +$$

$$+\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N/2-1}\left[A[k]\cos(\frac{2p}{\mathrm{N}}km) + B[k]\sin(\frac{2p}{\mathrm{N}}km)\right]$$

$$+\frac{(-1)^m}{N}A\left[\frac{N}{2}\right] \; .$$

Le espressioni di A[k] e B[k] seguono da

$$F[k] = \sum_{m=0}^{N-1} f[m] \left\{ \cos\left(\frac{2p\,k}{\mathrm{N}} m \right) - i \sin\left(\frac{2p\,k}{\mathrm{N}} m \right) \right\} =$$
$$= A[k] - i\,B[k]\ ;$$

da tali espressioni segue anche che:

A[k] = A[- k] = A[N - k] ;

B[k] = - B[- k] = - B[N - k] ; B[0] = B[N/2] = 0 .

Osservazione – Le precedenti proprietà implicano che:

- per memorizzare A[k] e B[k] occorre memorizzare solo N reali;
- sia per il calcolo di A[k] , B[k] che per il calcolo della formula di inversione occorrono N ^{2} operazioni sui reali anzichè sui complessi.

La formula di inversione della DFT reale segue da quella della DFT complessa scritta nel modo seguente:

$$f[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A[k]\, e^{i \frac{2p}{\mathrm{N}} km} - \frac{i}{N} \sum_{k=0}^{N-1} B[k]\, e^{i \frac{2p}{\mathrm{N}} km} \quad .$$

Usando le proprietà di simmetria di A[k] e B[k] si può scrivere il primo termine come segue:

$$\sum_{k=0}^{N-1} A[k]\, e^{i \frac{2p}{\mathrm{N}} km} = A[0] + \sum_{k=1}^{N/2-1} A[k]\, e^{i \frac{2p}{\mathrm{N}} km} +$$
$$+ (-1)^m A\left[\frac{N}{2} \right] + \sum_{k'=N/2}^{N-1} A[k']\, e^{i \frac{2p}{\mathrm{N}} k'm} \quad ,$$

e, se si pone k’ = N-k nella seconda sommatoria, questa diventa:

$$\sum_{k=N/2-1}^{1} A[k]\, e^{-i \frac{2p}{\mathrm{N}} km} \quad .$$

Raccogliendo i vari termini si ottiene:

$$\sum_{k=0}^{N-1} A[k]\, e^{-i\frac{2p}{N}km} = A[0] +$$

$$+\ 2\sum_{k=1}^{N/2-1} A[k]\cos\left(\frac{2p}{N}km\right) + (-1)^m A\left[\frac{N}{2}\right] \quad .$$

Analogamente per il secondo termine si ottiene:

$$\sum_{k=0}^{N-1} B[k]\, e^{i\frac{2p}{N}km} = \sum_{k=1}^{N/2-1} B[k]\, e^{i\frac{2p}{N}km} + \sum_{k'=N/2+1}^{N-1} B[k]\, e^{i\frac{2p}{N}k'm} \quad ,$$

dato che B[0] e B[N/2] sono nulli. Effettuando ancora il cambiamento di indice k' = N – k, si ha:

$$\sum_{k=N/2-1}^{1} B[k]\, e^{-i\frac{2p}{N}km} \quad .$$

Combinando i due termini si ottiene:

$$\sum_{k=0}^{N-1} B[k]\, e^{i\frac{2p}{N}km} = 2i\sum_{k=1}^{N/2-1} B[k]\sin\left(\frac{2p}{N}km\right) \quad .$$

Inserendo le espressioni precedentemene ottenute per le somme contenenti i coefficienti A[k] e B[k] nella formula di inversione della DFT complessa si ottiene la formula di inversione della DFT reale.

La DFT reale mette in evidenza il fatto che, quando si haacheare con segnali reali,si può sempre avorare con successioni reali perchè tali sono A[k] e B[k], che sono anche, rispettivamente, pari e dispari.

7 – Trasformata di coseno discreta (DCT)

Per un segnale reale, di lunghezza N+1, la trasformata coseno discreta è definita da:

$$A[k] = f[0] + 2\sum_{m=1}^{N-1} f[m]\cos\left(\frac{p}{\mathrm{N}}km\right) + (-1)^k f[N] \quad ,$$

per k =0, ..., N; vale inoltre la formula di inversione:

$$f[m] = \frac{1}{2N}\left\{A[0] + 2\sum_{m=1}^{N-1} A[k]\cos\left(\frac{p}{\mathrm{N}}km\right) + (-1)^m A[N]\right\}.$$

Si osservi che sia f[m] che C[k] sono costituiti dai valori distinti di due successioni pari di periodo 2N.

Segue dalla DFT reale applicata al caso di un segnale pari di lunghezza 2N. Poichè si ha f [2N-m] = f [m], questo segnale contiene N+1 valori distinti e precisamente: f [0] e f [N] contati una sola volta, f [1], ..., f [N-1] contati due volte. Valgono le seguenti relazioni:

$$f[2N-m]\cos\left[\frac{p}{N}(2N-m)\right] = f[m]\cos\left(\frac{p}{N}m\right);\, m=1,...,N-1,$$
$$f[2N-m]\sin\left[\frac{p}{N}(2N-m)\right] = -f[m]\sin\left(\frac{p}{N}m\right);\, m=1,...,N-1;$$

dalla prima relazione segue che A[k] è dato dall'espressione della pagina precedente, mentre dalla seconda, tenendo anche conto del fatto che f[N]sin(pN)=0 , segue che B[k] = 0. La formula di inversione segue poi dalla formula di inversione della DFT reale con N sostituito da 2N. E' ovvio che la trasformata coseno, pur essendo stata derivata dalla DFT, è una nuova trasformata per segnali di lunghezza N+1.

8 - Trasformata seno discreta (DST)

Per un segnale di lunghezza N – 1 la trasformata seno è definta da:

$$B[k] = \sum_{m=1}^{N-1} f[m] \sin\left(\frac{p}{N} km\right) \quad ,$$

per k = 1, ..., N-1; vale la formula di inversione:

$$f[m] = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N-1} B[k] \sin\left(\frac{p}{N} km\right) \quad .$$

Si osservi che dalle formule date segue che si possono considerare sia f[m] che S[k] come derivanti da segnali dispari di eriodo 2N. Grazie a questa osservazione anche la trasformata seno discreta può essere dedotta dalla DFT e dalla sua formula di inversione.

Segue dalla DFT reale applicata al caso di un segnale dispari di lunghezza 2N. Poichè si ha f [2N-m] = -f [m], questo segnale contiene N-1 valori distinti e precisamente, dato che f [0] = f [N] = 0, f [1], ..., f [N-1] contati due volte (una volta con il segno + e l'altra con il segno -). Valgono le seguenti relazioni:

$$f[2N-m]\cos\left[\frac{p}{N}(2N-m)\right] = -f[m]\cos\left(\frac{p}{N} m\right); m = 1,\ldots,N-1,$$

$$f[2N-m]\sin\left[\frac{p}{N}(2N-m)\right] = f[m]\sin\left(\frac{p}{N} m\right) \quad ; m = 1,\ldots,N-1;$$

dalla prima relazione segue che A[k] = 0, mentre dalla seconda segue che B[k] è dato dall'espressione della pagina precedente. La formula di inversione segue poi dalla formula di inversione della DFT reale con N sostituito da 2N.

E' ovvio che la trasformata sino, pur essendo stata derivata dalla DFT, è una nuova trasformata per segnali di lunghezza N-1.

9 - Trasformata coseno quarto d'onda discreta (QE-DCT)

Per un segnale di lunghezza N è definita da:

$$Q[k] = \sum_{m=0}^{N-1} f[m] \cos\left[\frac{p}{2N} k(2m+1)\right] \ ,$$

con la formula di inversione:

$$f[m] = \frac{1}{N}\left\{Q[0] + 2\sum_{k=1}^{N-1} Q[k] \cos\left[\frac{p}{2N} k(2m+1)\right]\right\} \ .$$

Come risulta da questa formula il segnale può essere prolungato ad una successione periodica di periodo 2N, soddisfacente alla condizione di parità quarto d'onda:

f[m] = f[-(m+1)] = f[2N – (m+1)] ;

la successione è ottenuta dal segnale ponendo nelle posizioni da N a 2N-1 il segnale ripercorso in senso inverso.

Una successione che gode delle precedenti proprietà viene detta quarto d'onda pari. La sua DFT, definita al solito da:

$$F[k] = \sum_{m=0}^{2N-1} f[m] e^{-i\frac{p}{N}km} \ ,$$

gode delle seguenti proprietà:

$$i) \quad F^*[k] = F[-k] \ ;$$

$$ii) \quad F^*[k] = e^{-i\frac{p}{N}k} F[k] \ ;$$

$$iii) \quad F[N] = 0 \ .$$

La i) è già nota ed esprime il fatto che f[m] è reale; la ii) è specifica del tipo di segnale considerato. Da queste due proprietà si ha che:

$$F^*[N] = F[-N] \quad , \quad F^*[N] = -F[N] \ ,$$

e quindi ne segue la iii). Non resta dunque che dimostrare la ii).

Usando la parità quarto d'onda, dalla definizione di DFT si ha:

$$F^*[k] = \sum_{m=0}^{2N-1} f[m] e^{i\frac{p}{N}km} = \sum_{m=0}^{2N-1} f[-(m+1)] e^{i\frac{p}{N}km} .$$

Ponendo m' = - (m+1) ed usando la proprietà che la somma su un intervallo periodo non dipende dal particolare intervallo considerato, si ottiene:

$$F^*[k] = \sum_{m'=-1}^{-2N} f[m'] e^{-i\frac{p}{N}k(m'+1)} = e^{-i\frac{p}{N}k} \sum_{m=0}^{2N-1} f[m] e^{-i\frac{p}{N}km} ,$$

e quindi la ii) è dimostrata.

Si ponga ora:

$$Q[k] = e^{-i\frac{p}{2N}k} F[k] = \sum_{m=0}^{2N-1} f[m] e^{-i\frac{p}{2N}k(2m+1)} \quad ;$$

Q[k] gode delle seguenti proprietà:

$$
\begin{aligned}
&i') \quad && Q[-k] = Q[k] \;\; ; \;\; Q[k] \text{ periodica di periodo 4N} ; \\
&ii') \quad && Q^*[k] = Q[k] \;\; ; \\
&iii') \quad && Q[N] = 0 \;\; ; \\
&iv') \quad && Q[k \pm 2N] = -Q[k] \;\; \Rightarrow \;\; Q[2N-k] = -Q[k] \; .
\end{aligned}
$$

Si osservi che Q[k], pur essendo reale, pari e periodica con periodo 2N, ha solo N valori distinti. Infatti, grazie a iv'), per k = N+1, ..., 2N assume gli stessi valori assunti per k = N-1, ..., 0, ma cambiati di segno.

La i’) segue dalle proprietà i) e ii) di F[k]; infatti si ha:

$$Q^*[k] = e^{i\frac{p}{2N}k} F^*[k] = e^{i\frac{p}{2N}k} F[-k] = Q[-k] = Q[k] \ .$$

La periodicità può essere direttamente verificata. Inoltre la ii’) segue da i’) e da i):

$$Q[-k] = e^{i\frac{p}{2N}k} F[-k] = e^{i\frac{p}{2N}k} F^*[k] = e^{i\frac{p}{2N}k} e^{-i\frac{p}{N}k} F[k] = Q[k] \ .$$

La iii’) segue da iii). Infine la iv’) segue dalla periodicità di F[k]:

$$Q[k \pm 2N] = e^{-i\frac{p}{2N}(k \pm 2N)} F[k \pm 2N] = e^{-i\frac{p}{2N}k} F[k] = -Q[k] \ .$$

Dalla definizione di Q[k] si ha:

$$Q[k] = \sum_{m=0}^{2N-1} f[m] e^{-i\frac{p}{2N}k(2m+1)} = \sum_{m=0}^{N-1} f[m] e^{-i\frac{p}{2N}k(2m+1)} +$$
$$+ \sum_{m'=N}^{2N-1} f[m'] e^{-i\frac{p}{2N}k(2m'+1)} \ ;$$

pertanto, se nella seconda somma si pone m’ = 2N – (m+1) e si tiene conto del fatto che f[2N – (m+1)] = f[-(m+1)] = f[m], si ottiene:

$$Q[k] = \sum_{m=0}^{N-1} f[m] e^{-i\frac{p}{2N}k(2m+1)} + \sum_{m=N-1}^{1} f[m] e^{i\frac{p}{2N}k(2m+1)} =$$
$$= 2\sum_{m=0}^{N-1} f[m] \cos\left[\frac{p}{2N} k(2m+1)\right] \ .$$

La formula di inversione può essere ottenuta dalla formula di inversione della DFT, tenendo conto della proprietà iii) di F[k]. Si ha:

$$f[m] = \frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{2N-1} F[k]\, e^{i\frac{p}{N}km} = \frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{2N-1} Q[k]\, e^{i\frac{p}{2N}k(2m+1)} =$$

$$= \frac{1}{2N}\left\{ Q[0] + \sum_{k=1}^{N-1} Q[k]\, e^{i\frac{p}{2N}k(2m+1)} + \sum_{k'=N+1}^{2N-1} Q[k']\, e^{i\frac{p}{2N}k'(2m+1)} \right\}.$$

Se nella seconda somma si pone k’ = 2N – k e si tiene conto della proprietà iv’) per cui Q[2N – k] = - Q[k], nonchè della relazione:

$$e^{i\frac{p}{2N}k'(2m+1)} = -e^{-i\frac{p}{2N}k(2m+1)} \quad ,$$

combinando le due sommatorie si ottiene la formula di inversione desiderata.