4 -Trasformata di Fourier discreta 2D (DFT-2D)

- **Definizione e proprietà della DFT-2D**
- **Operazioni su immagini e loro trasformate**
- **Formula di inversione della DFT-2D**
- **Eguaglianza di Parseval**

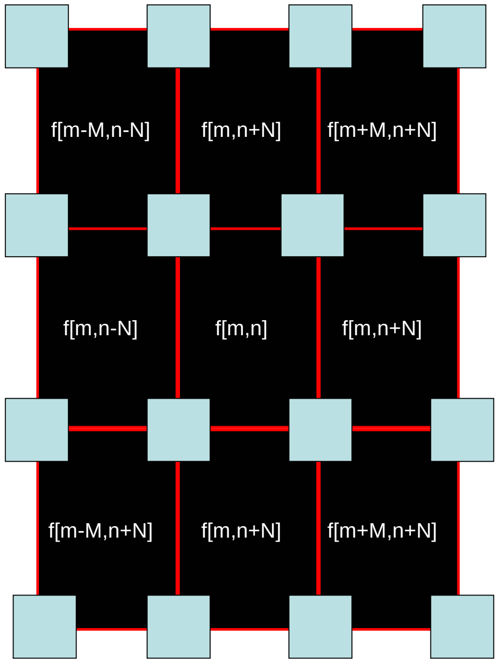
Premessa

Sia f un'immagine campionata, rappresentata da una tabella MxN: f[m,n]; m = 0, 1, ..., M -1; n = 0, 1, ..., N -1

f[0,0]	f[0,1]	....	f[0, N-1]
f[1,0]	f[1,1]	....	f[1, N-1]
....			
f[M-1,0]	f[M-1,1]	....	f[M-1,N-1]

Si considera la tabella prolungata in un tabella periodica, con periodo M nell'indice m e periodo N nell'indice n:

$$f[m \pm M, n] = f[m, n \pm N] = f[m \pm M, n \pm N] = f[m,n]$$



4.1 - Definizione e proprietà della DFT-2D

La trasformata 2D di una tabella si definisce mediante successive trasformate 1D applicate prima alle righe e poi alle colonne o viceversa.

Per ogni riga fissata (quindi valore dell'indice m fissato) si effettua la trasformata di Fourier 1D degli elementi di quella riga; effettuando questa operazione per tutte le righe si ottiene una nuova tabella MxN definita da:

$$F^{(R)}[m,l] = \sum_{n=0}^{N-1} f[m,n]\, e^{-i\frac{2\pi l}{N}n} \quad .$$

Tale tabella è anch'essa periodica, con periodo M nell'indice m e periodo N nell'indice l (verificare la periodicità).

Per ogni colonna fissata della tabella precedente, cioè per ogni valore fissato dell'indice k, si effettua la trasformata 1D dei valori di quella colonna; effettuando questa operazione per tutte le colonne si ottiene una nuova tabella MxN, definita da:

$$F[k,l]=\sum_{m=0}^{M-1} F^{(R)}[m,l]\, e^{-i\frac{2\pi k}{M}m} \quad .$$

F[k,l] è la DFT-2D di f[m,n] ed è anche data da:

$$F[k,l]=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f[m,n]\, e^{-i2\pi(\frac{k\,m}{M}+\frac{l\,n}{N})} \quad .$$

Si verifica facilmente che anche la nuova tabella è periodica con periodo M nell'indice k e periodo N nell'indice l.

Si ottiene lo stesso risultato se si effettua prima la trasformata per colonne:

$$F^{(C)}[k,n]=\sum_{m=0}^{M-1} f[m,n]\, e^{-i\frac{2\pi k}{M}m} \quad ,$$

e poi per righe:

$$F[k,l]=\sum_{n=0}^{N-1} F^{(C)}[k,n]\, e^{-i\frac{2\pi l}{N}n} \quad .$$

Si ha infatti solo uno scambio di sommatorie:

$$F[k,l]=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1} f[m,n]\, e^{-i2\pi(\frac{k\,m}{M}+\frac{l\,n}{N})} \quad .$$

Si osservi che F[0,0] è la somma dei valori di tutti i pixel dell'immagine:

$$F[0,0]=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1} f[m,n] \quad .$$

Prodotto tensoriale

Date due successioni periodiche, $f_1[m]$ e $f_2[n]$, la prima con periodo M e la seconda con periodo N, dicesi **prodotto tensoriale** delle due successioni la tabella periodica definita da:

$$f[m,n]=(f_1\otimes f_2)[m,n]=f_1[m]f_2[n] \quad ;$$
$$m=0,1,\dots,M-1\ ;\ n=0,1,\dots,N-1 .$$

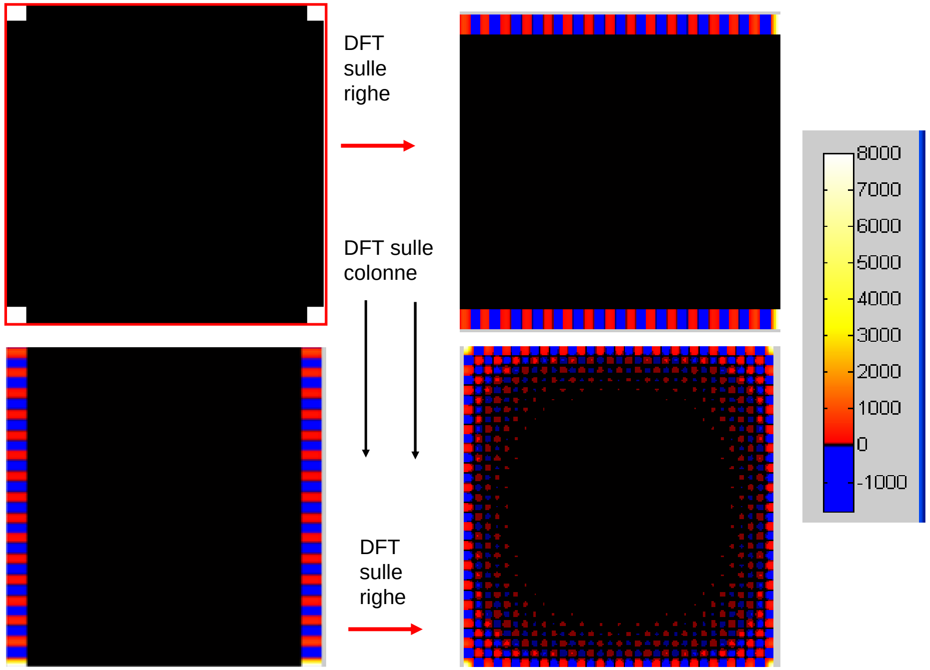
La DFT 2D del prodotto tensoriale di due successioni è il **prodotto tensoriale delle DFT 1D** delle due successioni:

$$F[k,l]=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f_1[m]f_2[n]\, e^{-i2\pi(\frac{k\,m}{M}+\frac{l\,n}{N})}=$$
$$=\sum_{m=0}^{M-1} f_1[m]\, e^{-i\frac{2\pi}{M}k\,m}\sum_{n=0}^{N-1} f_2[n]\, e^{-i\frac{2\pi}{N}l\,n}=F_1[k]F_2[l]$$
$$=(F_1\otimes F_2)[k,l].$$

Si consideri il caso M=N ed inoltre due successioni identiche e coincidenti con quella dell'esempio considerato nel caso 1D:

$$f_1[n]=f_2[n]=f[n]=1, n=-M,-M+1,\dots,M-1,M;\ M<N/2$$
$$f[n]=0,\ \text{altrimenti};$$
$$F[k]=\frac{\sin\left[\frac{\pi}{N}(2M+1)k\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{N}k\right)} \ ;$$
$$f[m,n]=(f\otimes f)[m,n]=f[m]f[n];$$
$$F[k,l]=F[k]F[l]=\frac{\sin\left[\frac{\pi}{N}(2M+1)k\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{N}k\right)}\frac{\sin\left[\frac{\pi}{N}(2M+1)l\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{N}l\right)}$$

La rappresentazione è data nella slide successiva.



Proprietà di simmetria della DFT-2D

In modo analogo a quanto fatto nel caso 1D si dimostra che:

1) se f[m,n] è reale, f[m,n]= f*[m,n], allora F*[k,l]= F[-k,-l];

2) se f[m,n] è pari, f[m,n]= f[-m,-n], allora anche F[k,l] è pari, F[k,l]= F[-k,-l];

3) se f[m,n] è dispari, f[m,n]= - f[-m,-n], allora anche F[k,l] è dispari, F[k,l]= - F[-k,-l];

4) se f[m,n] è reale e pari, allora anche F[k,l] è reale e pari;

5) se f[m,n] è reale e dispari allora F[k,l] è imaginario e dispari-

4.2 – Operazioni su immagini e loro trasformate

Traslazioni - Sia f[m,n] la tabella periodica di un'immagine f e {p,q} una coppia di numeri interi; dicesi {p,q}-traslata di f la tabella periodica definita da:

$$f_{\{p,q\}}[m,n] = f[m-p,n-q] \ .$$

In modo analogo a quanto fatto nel caso 1D, si dimostra che:

$$F_{\{p,q\}}[k,l] = e^{-i2\pi(\frac{pk}{M}+\frac{ql}{N})} F[k,l] \ .$$

Una tale operazione dicesi modulazione di fase. Nel caso particolare in cui M, N sono pari e p = M/2, q = N/2, si ha:

$$F_{\{M/2,N/2\}}[k,l] = (-1)^{k+l} F[k,l].$$

Modulazioni di fase – Sia di nuovo {p,q} una coppia di interi ed f[m,n] la tabella periodica dell'immagine f. Dicesi modulazione di fase di tale tabella l'operazione definita da:

$$f_{\{p,q\}}[m,n] = e^{i2\pi(\frac{pk}{M}+\frac{ql}{N})} f[m,n]$$

In modo analogo a quanto fatto nel caso 1D si dimostra che:

$$F_{\{p,q\}}[k,l] = F[k-p,l-q] \ ,$$

e pertanto una modulazione in fase dell'immagine equivale ad una traslazione della sua DFT. Nel caso particolare p=M/2, q=N/2, si ha:

$$f_{\{p,q\}}[m,n] = (-1)^{m+n} f[m,n] \ ,$$

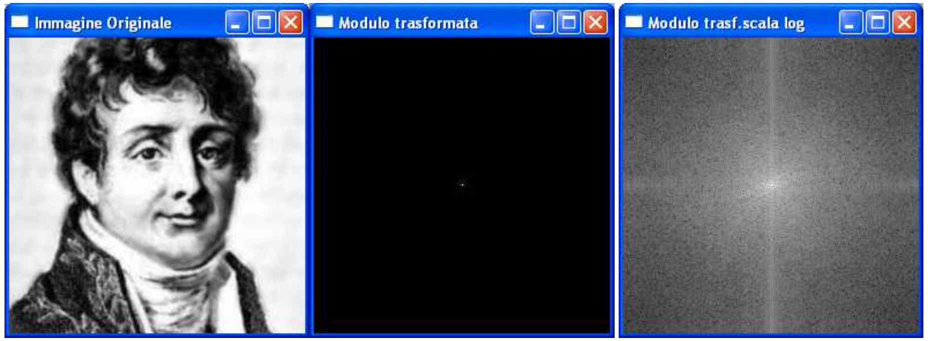
e questa operazione equivale a traslare la DFT in modo che la componente continua si trovi al centro della tabella.

4.3 – Spettro di un'immagine

Dicesi spettro di un'immagine il modulo della sua DFT. Per la sua rappresentazione è opportuno:

- usare una scala logaritmica, dato che la componente continua oscurerebbe il resto delo spettro;

- traslare la DFT in modo d'avere la componente continua al centro dell'immagine.



4.4 - Formula di inversione della DFT-2D

Si ottiene dalla formula di inversione della DFT monodimensionale, ripercorrendo a rovescio i passi che si compiono per calcolare la DFT bidimensionale. Il risultato è:

$$f[m,n] = \frac{1}{MN} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} F[k,l]\, e^{i2\pi\left(\frac{k\,m}{M}+\frac{l\,n}{N}\right)} \quad .$$

Infatti, se per calcolare la DFT-2D si era calcolata prima la DFT per righe e poi per colonne, si calcola prima la DFT inversa delle colonne di F[k,l] e si ottiene:

$$F^{(R)}[m,l] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} F[k,l]\, e^{i\frac{2\pi\,k}{M}m} \quad .$$

Si calcola poi la DFT inversa delle righe della nuova tabella.

Il risultato è:

$$f[m,n] = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} F^{(R)}[m,l]\, e^{i\frac{2\pi\,l}{N}n} \quad ,$$

e, sostituendovi l'equazione precedente si ottiene la formula di inversione.

Ovviamente si può procedere calcolando prima la DFT inversa delle righe di F[k,l]; si ottiene in tal modo la tabella $F^{(C)}[k,n]$ precedentemente definita. Si calcola poi la DFT inversa delle colonne di tale tabella ed il risultato finale è nuovamente la tabella f[m,n].

Anche nel caso 2D la formula d'inversione può essere interpretata come una rappresentazione dell'immagine, corrispondente alla tabella, come sovrapposizione di immagini ''sinusoidali'' che non sono altro che i prodotti tensoriali dei segnali ''sinusoidali'' introdotti nel caso 1D.

Si ponga:

$$w_{k,l}[m,n] = (w_k \otimes w_l)[m,n] = w_k[m]w_l[n] = e^{i2\pi\left(\frac{k\,m}{M}+\frac{l\,n}{N}\right)}$$

si ha allora:

$$f[m,n] = \frac{1}{MN} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} F[k,l]\, w_{k,l}[m,n] \quad .$$

Se inoltre si definisce il prodotto scalare tra tabelle come segue:

$$\langle f, h \rangle_2 = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f[m,n]\, h[m,n]^* \quad ,$$

si ha la proprietà di ortogonalità:

$$\langle w_{k,l}, w_{k',l'} \rangle_2 = \langle w_k, w_{k'} \rangle_2 \langle w_l, w_{l'} \rangle_2 = \delta_{k,k'} \delta_{l,l'} \quad .$$

4.5 – Eguaglianza di Parseval

Valgono le seguenti relazioni che prendono il nome rispettivamente di **eguaglianza di Parseval** ed **eguaglianza di Parseval generalizzata**:

$$\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}\left|f[m,n]\right|^2 = \frac{1}{MN}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1}\left|F[k,l]\right|^2 \quad ,$$

$$\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f[m,n]h[m,n]^* = \frac{1}{MN}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1} F[k,l]H[k,l]^*$$

che possono essere anche scritte nella forma seguente:

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{MN}\|F\|_2^2 \quad , \quad \langle f,h\rangle_2 = \frac{1}{MN}\langle F,H\rangle_2 \ .$$