

# 1 - Numeri complessi

- **Definizione e proprietà dei numeri complessi**
- **Rappresentazione geometrica dei numeri complessi**
- **Esponenziale di un numero complesso**
- **Coniugazione di un numero complesso**
- **Radici N-esime dell'unità**

*"In matematica, le rivoluzioni non si fanno distruggendo i mondi precedenti, che manterranno sempre la loro legittimità e verità; si fanno costruendo dei nuovi universi che o inglobano i precedenti, o si collocano accanto a essi. I nuovi esseri non annientano mai quelli vecchi; un bell'esempio di coabitazione tra vecchi e neonati."*

Denis Guedj - Il Teorema del Pappagallo

## 1.0 – Breve cronologia dei simboli

Gerolamo Cardano (1501 - 1576) : introduce  $\sqrt{-1}$  ;

Raffaele Bombelli (1526 - 1573): introduce  $-\sqrt{-1}$  e le regole:

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1 \quad , \quad \sqrt{-1} \cdot (-\sqrt{-1}) = +1 \quad , \\ (-\sqrt{-1}) \cdot \sqrt{-1} = +1 \quad , \quad (-\sqrt{-1}) \cdot (-\sqrt{-1}) = -1$$

René Descartes (1596 - 1650) : introduce il nome *numeri immaginari* ;

Leonhard Euler (1707 - 1783) : introduce il simbolo *i* per  $\sqrt{-1}$  ;

Karl Friedrich Gauss (1777 - 1855) : introduce il nome *numeri complessi* .

## 1.1 - Definizione e proprietà dei numeri complessi

Un numero complesso  $z$  è una coppia ordinata di numeri reali:  $z = \{ x , y \}$  .

Eguaglianza, somma e prodotto di coppie di numeri complessi sono definite da:

- eguaglianza:  $z = z'$  se  $x=x'$  ,  $y=y'$  ;
- somma:  $z + z' = \{ x , y \} + \{ x' , y' \} = \{ x + x' , y + y' \}$  ;
- prodotto:  $z z' = \{ x , y \} \{ x' , y' \} = \{ x x' - y y' , x y' + y x' \}$  .

Valgono le seguenti proprietà:

- commutatività:  $z + z' = z' + z$  ;  $z z' = z' z$  ;
- associatività:  $z + (z' + z'') = (z + z') + z''$  ;  $z (z' z'') = (z z') z''$  ;
- distributività:  $z (z' + z'') = z z' + z z''$  .

Il numero complesso  $\{ 0 , 0 \}$  gode della proprietà che

$$\{ 0 , 0 \} + \{ x , y \} = \{ x , y \}$$

per ogni numero complesso  $z$ ; è quindi l'elemento identità della somma. E' detto il numero complesso zero ed è indicato con 0.

Il numero complesso  $\{ 1 , 0 \}$  gode della proprietà che

$$\{ 1 , 0 \} \{ x , y \} = \{ x , y \}$$

per ogni numero complesso  $z$ ; è quindi l'elemento identità del prodotto. E' detto il numero complesso uno ed indicato con 1.

Pertanto i numeri complessi soddisfano a tutti gli assiomi a cui soddisfano i numeri reali. Essi formano un corpo, il corpo dei numeri complessi.

Il negativo di  $z$ ,  $-z$ , è il numero complesso  $-z = \{-x, -y\}$  dato che  $\{-x, -y\} + \{x, y\} = \{0, 0\}$ .

Infine ogni numero complesso  $z$ , diverso da 0, ha un reciproco  $\{u, v\}$  rispetto all'unità tale che:

$$\{u, v\} \{x, y\} = \{1, 0\}.$$

Ciò implica:

$$xu - yv = 1, \quad vx + uy = 0,$$

e quindi:

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Il reciproco di  $z$  viene indicato con  $z^{-1}$ .

Il sottoinsieme dei numeri complessi del tipo  $\{x, 0\}$  dicesi il sottoinsieme dei numeri REALI. Infatti esso è chiuso rispetto alle operazioni di somma e prodotto; inoltre negativo e reciproco sono dati dal negativo e reciproco del numero reale  $x$ . Pertanto non si fa nessuna distinzione tra questo sottoinsieme ed il corpo dei numeri reali. Inoltre si possono considerare i numeri complessi come un'estensione dei numeri reali.

Il sottoinsieme dei numeri complessi del tipo  $\{0, y\}$  dicesi il sottoinsieme dei numeri IMMAGINARI. Esso è chiuso rispetto alla somma mentre il prodotto di due numeri immaginari è un numero reale dato che:

$$\{0, y\} \{0, y'\} = \{-yy', 0\}.$$

Le componenti  $x$  e  $y$  di  $z$  vengono dette rispettivamente la PARTE REALE e la PARTE IMMAGINARIA di  $z$  ed indicate con  $x = \text{Re}(z)$ ,  $y = \text{Im}(z)$ .

## Riepilogo delle quattro operazioni

somma  $z + z' = \{x + x', y + y'\}$

sottrazione  $z - z' = z + (-z') = \{x - x', y - y'\}$

prodotto  $z z' = \{xx' + yy', xy' - yx'\}$

divisione  $\frac{z}{z'} = z \frac{1}{z'} = \left\{ \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2}, \frac{-xy' + yx'}{x'^2 + y'^2} \right\}$

Il numero immaginario  $\{0, 1\}$  gode della proprietà che il suo quadrato è eguale al numero reale  $\{-1, 0\}$ ; tale numero viene detto unità immaginaria ed indicato con il simbolo  $i$ . Si scrive:

$$i^2 = -1.$$

L'identità

$$\{x, y\} = \{x, 0\} + \{0, 1\} \{y, 0\}$$

suggerisce la seguente forma per i numeri complessi:

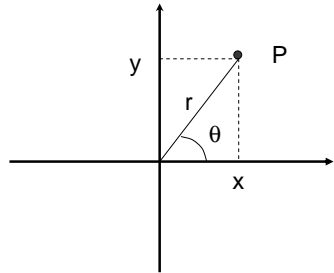
$$z = x + iy.$$

OSSERVAZIONE - Tale notazione permette di ottenere la regola per il prodotto usando le regole per il prodotto dei binomi e la proprietà di  $i$ :

$$\begin{aligned} zz' &= (x + iy)(x' + iy') = xx' + ixy' + iyx' + i^2 yy' = \\ &= (xx' - yy') + i(xy' + yx'). \end{aligned}$$

## 1.2 - Rappresentazione geometrica dei numeri complessi

I numeri complessi possono essere posti in corrispondenza con i punti del piano identificando la parte reale di  $z$  con l'ascissa del punto corrispondente  $P$  e la parte immaginaria di  $z$  con l'ordinata di  $P$ .



Ciò porta a definire il modulo di  $z$ :

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e la fase di  $z$

$$\vartheta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Valgono le relazioni (coordinate polari):

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta.$$

## 1.3 - Esponenziale di un numero complesso

Dalle precedenti relazioni segue che:

$$z = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = r e^{i\vartheta}$$

dove si è posto, per definizione:

$$e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$$

Valgono le seguenti relazioni:

$$e^{in\pi} = (-1)^n, \quad e^{i(n+\frac{1}{2})\pi} = (-1)^n i$$

ed inoltre:

$$(e^{i\vartheta})' = i e^{i\vartheta}, \quad e^{i(\vartheta+\vartheta')} = e^{i\vartheta} e^{i\vartheta'}$$

Dimostrazione della formula di derivazione:

$$(e^{i\vartheta})' = -\sin \vartheta + i \cos \vartheta = i(i \sin \vartheta + \cos \vartheta) = i e^{i\vartheta}.$$

Dimostrazione della formula di fattorizzazione:

$$\begin{aligned} e^{i(\vartheta+\vartheta')} &= \cos(\vartheta+\vartheta') + i \sin(\vartheta+\vartheta') = \\ &= (\cos \vartheta \cos \vartheta' - \sin \vartheta \sin \vartheta') + i(\sin \vartheta \cos \vartheta' + \cos \vartheta \sin \vartheta') = \\ &= (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)(\cos \vartheta' + i \sin \vartheta') = e^{i\vartheta} e^{i\vartheta'}. \end{aligned}$$

La formula di fattorizzazione giustifica l'uso della notazione esponenziale. Valgono le seguenti formule:

$$\begin{aligned} |e^{i\vartheta}| &= 1; \quad z z' = r r' e^{i(\vartheta+\vartheta')}; \quad |z z'| = r r' = |z| |z'|; \\ z^{-1} &= r^{-1} e^{-i\vartheta}; \quad z^n = r^n e^{in\vartheta}, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Le precedenti formule definiscono l'esponenziale di un numero immaginario. L'esponenziale di un numero complesso arbitrario  $z$  può essere definito usando la formula di fattorizzazione e l'espressione dell'esponenziale di un numero immaginario precedentemente introdotta:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Ne segue che:

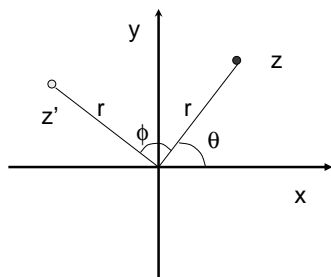
$$|e^z| = e^x;$$

$$\begin{aligned} e^{z+z'} &= e^{(x+x')+i(y+y')} = e^{x+x'} e^{i(y+y')} = \\ &= e^x e^{x'} e^{iy} e^{iy'} = e^z e^{z'}. \end{aligned}$$

Interpretazione geometrica del prodotto di un numero complesso per l'esponenziale di un numero immaginario; poichè si ha:

$$z' = ze^{i\varphi} = re^{i\vartheta} e^{i\varphi} = re^{i(\vartheta+\varphi)}$$

ne segue che il numero complesso  $z'$  ha lo stesso modulo di  $z$  ma è ruotato rispetto a  $z$  di un'angolo  $\varphi$ .

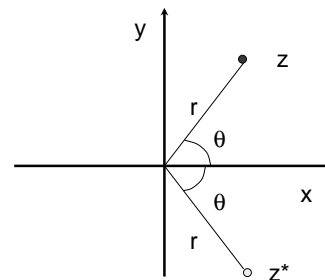


## 1.4 - Coniugazione di un numero complesso

Il complesso coniugato di  $z = x + iy$  è definito da:

$$z^* = x - iy;$$

nel piano  $z^*$  è il simmetrico di  $z$  rispetto all'asse delle ascisse.



Valgono le relazioni:

$$z^* = re^{-i\vartheta};$$

$$zz^* = |z|^2;$$

$$\frac{1}{2}(z + z^*) = x;$$

$$\frac{1}{2i}(z - z^*) = y.$$

Nel caso dell'esponenziale di un numero immaginario si ha

$$(e^{i\vartheta})^* = e^{-i\vartheta} = \cos \vartheta - i \sin \vartheta,$$

da cui si ottengono le formule di Eulero:

$$\cos \vartheta = \frac{1}{2}(e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}), \quad \sin \vartheta = \frac{1}{2i}(e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}).$$

## 1.5 - Radici N-esime dell'unità

Le radici N-esime dell'unità sono definite come le soluzioni dell'equazione

$$z^N = 1$$

Nel campo reale questa equazione ha solo la soluzione  $+1$  se  $N$  è dispari e le soluzioni  $+1$  e  $-1$  se  $N$  è pari. Nel campo complesso ha sempre  $N$  soluzioni. Se si pone:

$$w = e^{i\frac{2\pi}{N}},$$

esse sono date da:

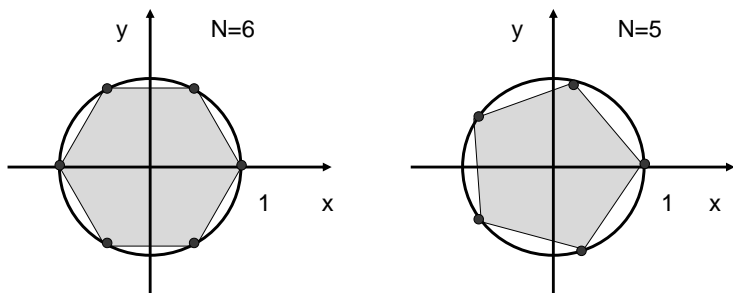
$$z_n = w^n; \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

e si ottengono a partire da 1 mediante successive rotazioni dell'angolo  $2\pi/N$ .

**Verifica:** per ogni N intero e positivo si ha:

$$z_n^N = w^{nN} = e^{i\left(\frac{2\pi}{N}\right)nN} = e^{i2\pi n} = 1 .$$

Le radici N-esime dell'unità sono rappresentate da punti equispaziati sul cerchio di raggio 1.



**Teorema -** La somma delle radici N-esime dell'unità è zero:

$$\sum_{n=0}^{N-1} z_n = 0 .$$

**Dimostrazione -** Dall'identità:

$$(1-w)(1+w+w^2+\dots+w^{N-1})=1-w^N ,$$

si ottiene:

$$1+w+w^2+\dots+w^{N-1} = \frac{1-w^N}{1-w} ,$$

da cui, ponendo:

$$w = e^{i\frac{2\pi}{N}} \Rightarrow w^n = z_n , w^N = 1 ,$$

si ottiene il teorema.