3 - Trasformata di Fourier discreta
Discrete Fourier Transform
(DFT)

- **Discretizzazione della serie di Fourier**
- **Definizione e proprietà della DFT**
- **DFT di segnali traslati**
- **Un esempio di DFT**
- **Formula di inversione della DFT**
- **Eguaglianza di Parseval**
- **DFT reale**

3.1 - Discretizzazione della serie di Fourier

Si consideri un segnale periodico x(t), di periodo T, rappresentato dalla serie di Fourier:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\frac{2\pi}{T}k\,t} \qquad , \qquad c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-i\frac{2\pi}{T}k\,t} dt \quad .$$

Per calcolare i coefficienti di Fourier c_k si può ricorrere ad una formula di quadratura. Si supponga di suddividere l'intervallo [0,T] in N intervalli eguali mediante i punti:

$$t_n = \frac{T}{N} n \qquad ; \qquad n = 0,1,\ldots\ldots,N-1 \quad .$$

Si può allora approssimare l'integrale di una funzione h(t) su [0,T] mediante la somma dei termini che si ottengono moltiplicando il valore di h(t) in un punto t_n per la lunghezza dell'intervallo adiacente.

Si usa quindi l'approssimazione:

$$\int_0^T h(t)\, dt \;\cong\; \sum_{n=0}^{N-1} h(t_n) \frac{T}{N} \qquad .$$

Ne segue la seguente approssimazione per i coefficienti di Fourier:

$$c_{N,k} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n)\, e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \qquad .$$

Questa espressione implica che si ottengono solo N coefficienti tra loro distinti; dalle relazioni:

$$e^{-i\frac{2\pi}{N}(k\pm N)n} = e^{-i\frac{2\pi}{N}k\,n} \quad , \quad e^{-i\frac{2\pi}{N}(N-k)n} = e^{i\frac{2\pi}{N}k\,n}$$

segue infatti che:

$$c_{N,k\pm N} = c_{N,k} \quad , \quad c_{N,N-k} = c_{N,-k} \quad .$$

Si possono quindi scegliere i coefficienti con k da 0 a N-1 o da –(N/2-1) a N/2 (se N è pari).

Se si pone:

$$F[k] = N c_{N,k} \qquad , \qquad f[n] = f(t_n) \qquad ,$$

di modo che:

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]\, e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \qquad , \qquad (*)$$

mediante gli N coefficienti di Fourier cosi' calcolati si può ottenere una approssimazione a N termini del segnale di partenza. Ammettendo che N sia pari, si può scrivere:

$$f_N(t_n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F[k]\, e^{i\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N}\sum_{k=-(N/2-1)}^{N/2} F[k]\, e^{i\frac{2\pi}{N}nk} \cong f(t_n) = f[n] \quad .$$

Qui si è supposto di calcolare il segnale solo nei punti t_n. Si osservi che la frequenza massima legata alla distanza di campionamento è data da:

$$\nu_{\max} = \frac{1}{2\,\Delta t} = \frac{N}{2}\frac{1}{T} = \frac{N}{2}\nu \quad ,$$

e pertanto l'armonica massima è N/2 volte l'armonica fondamentale.

Un risultato importante della teoria della trasformata di Fourier discreta è che la precedente somma non dà solamente una approsimazione dei valori del segnale di partenza ma **restituisce esattamente** tali valori. Se si osserva inoltre che gli F[k] formano una successione periodica con periodo N e che anche gli esponenziali nella sommatoria sono periodici in k con periodo N, si potrà scrivere:

$$f[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F[k]\, e^{i\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N}\sum_{k=-N/2+1}^{N/2} F[k]\, e^{i\frac{2\pi}{N}nk} \quad , \qquad (**)$$

la secnda espressione potendo essere utilizzata nel caso in cui N è pari. Infatti, se si ha una successione periodica, la somma dei suoi valori su un qualunque intervallo periodo (di lunghezza N) non dipende dall'intervallo in questione.

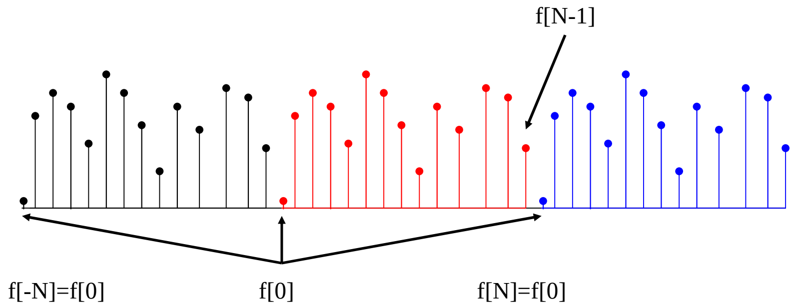
L'equazione ($_*$) costituirà la definizione della **trasformata di Fourier discreta** mentre l'equazione ($_{**}$) sarà detta la sua formula di inversione.

Premessa

Sia f un segnale campionato, rappresentato da un vettore di lunghezza N con componenti

f [0] , f [1] , ... , f [N-1] ;

nella teoria della DFT occorre considerare il segnale prolungato in un segnale periodico con periodo N. Così f[m] è definito per ogni m, con la proprietà f [m+N] = f [m-N] = f [m].



3.2 - Definizione e proprietà della DFT

La trasformata di Fourier discreta di un segnale periodico f di periodo N è la successione periodica F, anch'essa di periodo N, definita da:

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]\, e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$$

per ogni k ed in particolare per k = 0, 1, ... ,N-1. Si ha infatti:

$$F[k \pm N] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]\, e^{-i\frac{2\pi}{N}(k\pm N)n} = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]\, e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}\, e^{\mp i 2\pi n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} f[n]\, e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} = F[k] \quad .$$

Dalla periodicità di f[m] segue che, per ogni intero M si ha:

$$F[k] = \sum_{n=M}^{M+N-1} f[n]\, e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \quad .$$

La DFT di un segnale REALE soddisfa alle condizioni:

$$F^*[k] = F[-k] = F[N-k] \; .$$

Dimostrazione:

$$F^*[k] = \Big(\sum_{n=0}^{N-1} f[n]\, e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}\Big)^* = \sum_{n=0}^{N-1} f^*[n]\, e^{i\frac{2\pi}{N}kn} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} f[n]\, e^{i\frac{2\pi}{N}kn} = F[-k].$$

La seconda relazione segue dalla periodicità del segnale.

Ciò significa che, se si considerano i valori di k da 0 a N-1, e se N è pari, allora F[N/2] è reale e i valori di F[k] per k=N/2+1,....,N-1 sono i complessi coniugati dei valori per k=N/2-1, N/2-2,.....,1 (nell'ordine).

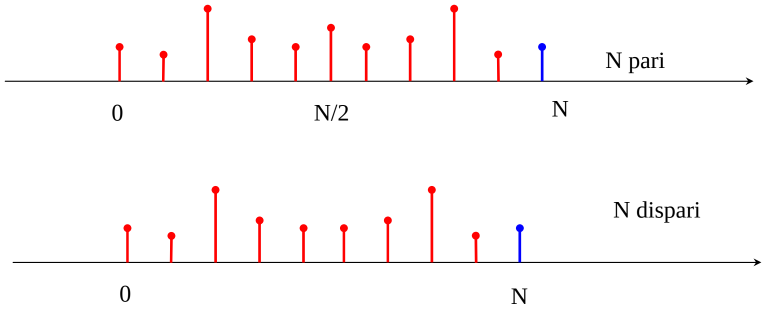
Un segnale periodico f si dice PARI se soddisfa la condizione:

f [-n] = f [n] ;

pertanto, all'interno dell'intervallo periodo {0, 1, …, N-1}, si ha:

f [N-n] = f [n] .

Se N è dispari il segnale contiene (N+1)/2 valori distinti; N/2+1 se N è pari.



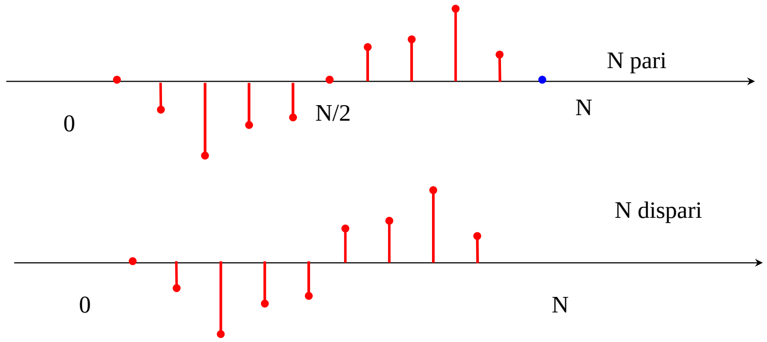
Un segnale periodico f si dice DISPARI se soddisfa la condizione:

f [-n] = - f [n] ;

pertanto, all'interno dell'intervallo periodico {0, 1, …, N-1}, si ha:

f [N-n] = - f [n] .

Si ha: f[0] = - f[N] = - f[0] e quindi f[0] =0; se N è pari, si ha anche f[N/2] = 0. Ne segue che, se N è dispari, il segnale contiene, a parte il segno, (N-1)/2 valori distinti mentre, se N è pari, ne contiene (N-2)/2.



La DFT di un segnale PARI è PARI mentre la DFT di un segnale DISPARI è DISPARI.

Dimostrazione: Se f è pari, si ha:

$$F[-k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]\, e^{i\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n'=0}^{1-N} f[-n']\, e^{-i\frac{2\pi}{N}kn'} =$$

$$= \sum_{n'=0}^{1-N} f[n']\, e^{-i\frac{2\pi}{N}kn'} = \sum_{n'=0}^{N-1} f[n']\, e^{-i\frac{2\pi}{N}kn'} = F[k] \, .$$

L'ultima eguaglianza deriva dall'osservazione, già fatta, che la somma su un intervallo periodo dei valori di una successione periodica non dipende dall'intervallo.

In modo analogo si dimostra la seconda parte della proposizione.

Se f è un segnale REALE e PARI allora anche la sua DFT è reale e pari; se f è un segnale REALE e DISPARI allora la sua DFT è IMMAGINARIA e DISPARI.

Per quanto riguarda la prima parte della proposizione si ha:

$$F^*[k] = F[-k] = F[k] \, .$$

In modo analogo si ottiene la seconda parte:

$$F^*[k] = F[-k] = -F[k] \, .$$

QUADRO RIASSUNTIVO DELLE PROPRIETA' DI SIMMETRIA:

segnale REALE	DFT
f[n] = f*[n]	F*[k] = F[-k]
segnale PARI	DFT PARI
f[n] = f[-n]	F[k] = F[-k]
segnale DISPARI	DFT DISPARI
f[n] = - f[-n]	F[k] = - F[-k]
segnale REALE e PARI	DFT REALE e PARI
f[n] = f*[n] = f[-n]	F[k] = F*[k] = F[-k]
segnale REALE e DISPARI	DFT IMMAGINARIA e DISPARI
f[n] = f*[n] = - f[-n]	F[k] = - F*[k] = - F[-k]

3.3 - DFT di segnali traslati

Sia p un intero ed f un segnale periodico; si dice p-TRASLATO di f il segnale periodico definito da:

$$f_p[n] = f[n-p] \ .$$

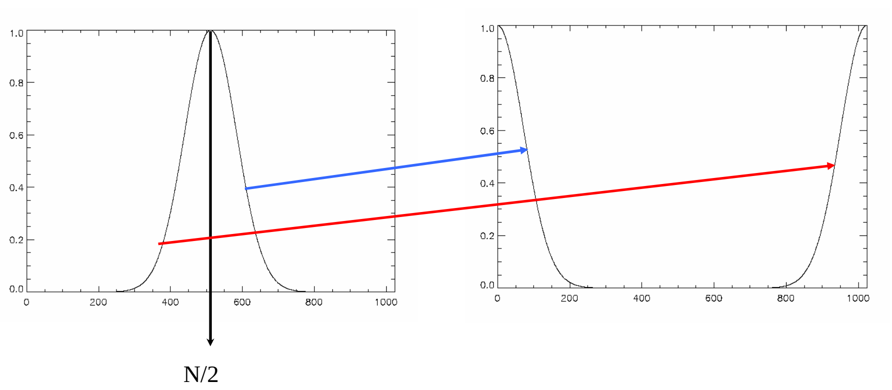
Usando anche la condizione di periodicità:

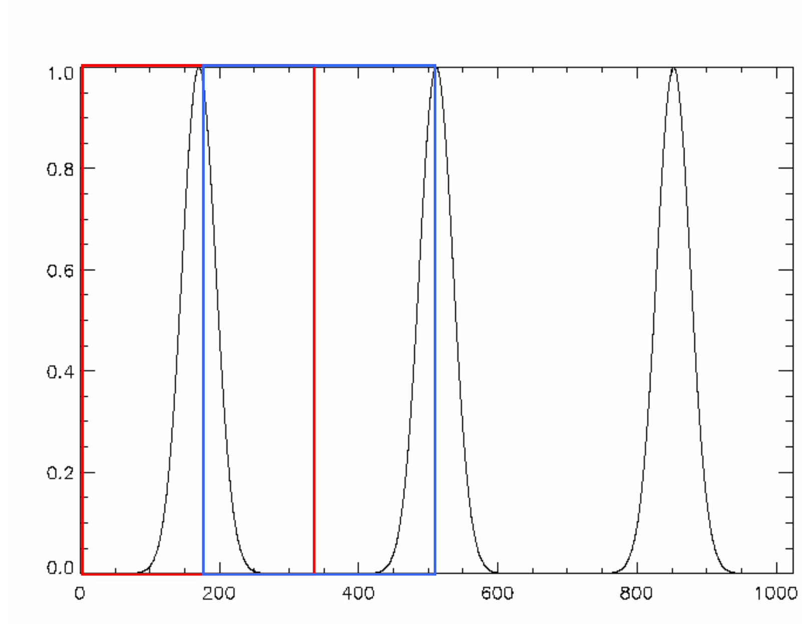
$$f_p[n] = f[N+n-p] \ ,$$

si vede che, nell'intervallo periodo di partenza { 0, 1, …, N-1}, l'effetto di una p-traslazione di f consiste nel porre nelle posizioni { 0, 1, …, p-1} i valori di f nelle posizioni { N-p, N-p+1, …, N-1} e nelle posizioni { p, p+1, …, N-1} i valori di f nelle posizioni { 0, 1, …, N-p-1}. Pertanto una p-traslazione è equivalente ad una PERMUTAZIONE CICLICA dei valori di f sull'intervallo fondamentale.

Se N è pari e p = N/2, si ottiene il RIBALTAMENTO del segnale: i valori di f nelle seconde N/2 posizioni vengono posti nelle prime N/2, mentre i valori nelle prime N/2 posizioni vengono posti nelle seconde N/2.

Esempio di ribaltamento di un segnale





Teorema - La DFT del p-traslato di f è data da:

$$F_p[k] = e^{-i\frac{2\pi}{N}pk} F[k] \quad .$$

Dimostrazione – Si ha:

$$F_p[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n-p] e^{-i\frac{2\pi}{N}k\,n} = \sum_{n'=-p}^{N-1-p} f[n'] e^{-i\frac{2\pi}{N}k(n'+p)} =$$

$$= e^{-i\frac{2\pi}{N}pk} \sum_{n'=0}^{N-1} f[n'] e^{-i\frac{2\pi}{N}k\,n'} = e^{-i\frac{2\pi}{N}pk} F[k] \quad ,$$

dove si è usato ancora una volta il fatto che la somma su un intevallo periodo non dipende dall'intervallo.

OSSERVAZIONE – Nel caso particolare di N pari e p = N/2, si ha

$$F_{N/2}[k] = (-1)^k F[k] \quad .$$

3.4 - Un esempio di DFT

Si consideri il segnale periodico di lunghezza N cosi' definito per valori dell'indice m nell'intervallo -N/2 + 1 , N/2:

f[n] = 1, m = -M, -M+1,...,0,...,M-1, M ; M < N/2

f[n] = 0, altrimenti.

Pertanto il segnale ha solo 2M+1 componenti diverse da zero.

Tenendo conto della periodicità la DFT può essere definita da:

$$F[k] = \sum_{n=-N/2+1}^{N/2} f[n]\, e^{-i\frac{2\pi}{N}k\,n} \quad ,$$

e quindi, nel caso particolare considerato, si ha:

$$F[k] = \sum_{n=-M}^{M} e^{-i\frac{2\pi}{N}k\,n}.$$

Si osservi che si ha: F[0] = 2M+1.

E' opportuno scrivere la trasformata nel modo seguente:

$$F[k] = 1 + \sum_{n=1}^{M} e^{-i\frac{2\pi}{N}k\,n} + \sum_{n=1}^{M} e^{i\frac{2\pi}{N}k\,n} = \sum_{n=0}^{M} e^{-i\frac{2\pi}{N}k\,n} + \sum_{n=0}^{M} e^{i\frac{2\pi}{N}k\,n} - 1 \quad =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{M} e^{i\frac{2\pi}{N}k\,n}\right) - 1;$$

si calcola allora la sommatoria mediante la formula già piu' volte usata:

$$\sum_{n=0}^{M} e^{i\frac{2\pi}{N}k\,n} = \frac{1 - e^{i\frac{2\pi}{N}(M+1)k}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{N}k}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{N}(M+1)k}\left(e^{i\frac{\pi}{N}(M+1)k} - e^{-i\frac{\pi}{N}((M+1))k}\right)}{e^{i\frac{\pi}{N}k}\left(e^{i\frac{\pi}{N}k} - e^{-i\frac{\pi}{N}k}\right)} =$$

$$= e^{i\frac{\pi}{N}Mk} \frac{\sin\left[\frac{\pi}{N}(M+1)k\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{N}k\right]}.$$

Sostituendo nell'espresione per F[k] si ottiene:

$$F[k] = 2\,\frac{\cos\left(\frac{\pi M}{N}k\right)\sin\left[\frac{\pi}{N}(M+1)k\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{N}k\right)} - 1 \quad ,$$

da cui, utilizzando la formula:

2 sin a cos b = sin(a + b) + sin(a – b) ,

si giunge al risultato finale:

$$F[k] = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{N}(2M+1)k\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{N}k\right)} \quad .$$

Si osservi che F[k] ha il massimo assoluto per k=0, N; ha un andamento oscillante e decrescente con ''zeri'' (piu' esattamente cambiamenti di segno) spaziati circa di N/(2M+1): piu' è ''largo'' il segnale, piu' ''stretto'' diventa il massimo principale della sua DFT.

3.5 - Formula di inversione della DFT

In diverse operazioni di elaborazione di segnali si effettuano operazioni sulla sua DFT; si pone allora il problema di sapere quale segnale corrisponde alla DFT elaborata. Più in generale si pone il problema di sapere se la DFT di un segnale contiene un'informazione completa sul segnale medesimo, o, in altre parole, se è possibile ricostruire il segnale a partire dalla sua DFT.

La risposta a questo problema è data dalla **formula di inversione** della DFT che assume la forma seguente:

$$f[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}F[k]e^{i\frac{2\pi}{N}k\,n} \quad .$$

A parte il fattore 1/ N, si noti la simmetria tra definizione ed inversione dela DFT: si ottengono l'una dall'altra cambiando i in –i ad esponente.

Dimostrazione - La formula di inversione è una diretta conseguenza del fatto che la somma delle radici N-esime dell'unità è zero. Se si indica con h[m] il secondo membro della formula di inversione precedentemente data, sostituendovi la formula della DFT si ha:

$$h[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(\sum_{n'=0}^{N-1}f[n']e^{-i\frac{2\pi}{N}k\,n'})e^{i\frac{2\pi}{N}k\,n}=$$

$$=\sum_{n'=0}^{N-1}(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}e^{i\frac{2\pi}{N}(n-n')k})\,f[n']=\sum_{n'=0}^{N-1}S[n,n']f[n'] \ ,$$

dove si è posto:

$$S[n,n']=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}e^{i\frac{2\pi}{N}(n-n')k} \quad .$$

Per n = n' si ha S[n , n] = 1 mentre per n diverso da n' si ha: S[n , n'] = 0.

Quest'ultima proprietà deriva dal Teorema sulla somma delle radici N-esime dell'unità dato che, al variare di k, i termini della sommatoria percorrono tutte le radici N-esime. Si può comunque ripetere la dimostrazione di quel Teorema ponendo

$$w=e^{i\frac{2\pi}{N}(n-n')} \quad .$$

Si può anche scrivere:

$$S[n,n']=\delta_{n,n'} \ ,$$

dove si è introdotto il simbolo di Kronecker $\delta_{n,n'}$ che è eguale a 1 per n = n' ed eguale a zero altrimenti. La condizione suddetta è anche detta **condizione di ortogonalità**.

Ne segue ovviamente che h[n] = f[n].

Supponiamo che N sia pari. Se si introducono i seguenti segnali periodici:

$$u_k[n]=e^{i\frac{2\pi}{N}k\,n} \quad ; \quad k=0,1,...,N-1 \ ,$$

la formula di inversione puo' essere scritta nella forma seguente:

$$f[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}F[k]u_k[n] \ ,$$

e quindi il segnale periodico f[n] è una combinazione lineare dei segnali periodici w_k[n]. Questi godono delle proprietà:

$$u_0[n]=1 \qquad ; \qquad u_{\frac{N}{2}}[n]=(-1)^n$$

$$u_{N-k}[n]=e^{i\frac{2\pi(N-k)}{N}n}=e^{-i\frac{2\pi}{N}k\,n}=u_{-k}[n] \ ; \ k=1,...,\frac{N}{2}-1 \ .$$

Si consideri il caso, frequente nelle applicazioni, in cui N=2 p ; si ha:

$$u_1[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) \quad ,$$

e quindi la parte reale si annulla per n=N/4 e 3N/4, mentre la parte immaginaria si annulla per n=0 e N/2 e pertanto ha un solo cambiamento di segno. Entrambe hanno periodo N e quindi il segnale ha frequenza 1. Si consideri poi:

$$u_2[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{N}2n\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{N}2n\right) \;;$$

la parte immaginaria si annulla per n=0, N/4, N/2, 3N/4 ed ha tre cambiamenti di segno, con periodo N/2 e frequenza 2. Lo stesso dicasi per la parte reale. Il segnale successivo:

$$u_3[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{N}3n\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{N}3n\right) \;,$$

ha solo periodo N e la sua parte immaginaria si annulla solo per n=0; tuttavia cambia segno 5 volte e le si può quindi attribuire frequenza 3.

In generale si ha:

$$u_k[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\,n\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{N}k\,n\right) \;,$$

e quindi la parte immaginaria cambia segno 2k-1 volte. Solo nei casi k=2,4,...,N/2 questi avvengono in corrispondenza di zeri ed il segnale ha periodo N/k. Si può comunque affermare che il segnale ha frequenza k, per i valori di k fino a N/2. Per quelli successivi la frequenza è N-k. Pertanto per k=1 si ha l'armonica fondamentale mentre per gli altri valori di k si ottengono le armoniche superiori. Quella di frequenza massima corrisponde a k = N/2.

Con le precedenti notazioni si può anche scrivere la formula di inversione della DFT nella forma seguente:

$$f[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=-(N/2-1)}^{N/2} F[k]\,u_k[n] \quad ,$$

usando la solita proprietà che la somma non dipende dal particolare intervallo periodo scelto.

Se si introduce la seguente definizione di prodotto scalare tra due segnali a valori complessi:

$$\langle f, h\rangle_2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f[n]\,h^*[n] \quad ,$$

a cui si può asociare una norma:

$$\| f \|_2 = \left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |f[n]|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad ,$$

allora si può dare un'interpretazione geometrica alla condizione di ortogonalità; si ha infatti:

$$\langle u_k, u_j\rangle_2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}(k-j)n} = \delta_{k,j} \;,$$

e quindi i segnali sinusoidali u_k formano una **base ortonormale** nello spazio formato da tutti i segnali.

3.6 – Eguaglianza di Parseval

Valgono le seguenti relazioni che prendono il nome rispettivamente di **eguaglianza di Parseval** ed **eguaglianza di Parseval generalizzata**:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |f[n]|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |F[k]|^2 \quad ,$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} f[n]\,h^*[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F[k]\,H^*[k]$$

che possono essere anche scritte nella forma seguente:

$$\| f \|_2^2 = \frac{1}{N}\| F \|_2^2 \quad , \quad \langle f, h\rangle_2 = \frac{1}{N}\langle F, H\rangle_2 \;.$$

Dimostriamo l'eguaglianza di Parseval generalizzata, dato che quella di Parseval segue da questa ponendo h = f. Dalla formula di inversione per f, con uno scambio dell'ordine di sommazione, si ha:

$$\sum_{n=0}^{N-1} f[n]h^*[n] = \sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F[k]e^{i\frac{2\pi}{N}nk}\right)h^*[n] =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F[k]\left(\sum_{n=0}^{N-1} h[n]e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}\right)^* = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F[k]H^*[k]\ .$$

Si osservi in particolare che, se due segnali sono **ortogonali**, cioè il loro prodotto scalare, come definito in precedenza, è nullo, allora anche le loro DFT sono ortogonali.

3.7 – DFT reale

Nel caso di un segnale reale f[m] ed N pari la DFT complessa può essere rimpiazzata dalle seguenti trasformate reali:

$$A[k] = \mathrm{Re}\ F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]\cos\left(\frac{2\pi}{\mathrm{N}}k\ n\right);\ k = 0,\dots,\frac{N}{2};$$

$$\mathrm{B}[\mathrm{k}] = \mathrm{Im}\ F[k] = \sum_{n=1}^{N-1} f[n]\sin\left(\frac{2\pi}{\mathrm{N}}k\ n\right);\ k = 1,\dots,\frac{N}{2}-1$$

per le quali vale la formula di inversione:

$$f[n] = \frac{1}{N}A[0] +$$

$$+\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N/2-1}\left[A[k]\cos\left(\frac{2\pi}{\mathrm{N}}k\ n\right) + B[k]\sin\left(\frac{2\pi}{\mathrm{N}}k\ n\right)\right]$$

$$+\frac{(-1)^m}{N}A\left[\frac{N}{2}\right]\ .$$