La tomografia: principi generali

Le tecniche a raggi-X classiche (radiografia) producono la registrazione fotografica bidimensionale (sulla lastra) dell'ombra proiettata da un cono di radiazione che attraversa un oggetto tridimensionale (corpo umano).

Le immagini prodotte in questo modo contengono informazioni sovrapposte da strutture che si trovano a differenti profondità nell'oggetto.

La Tomografia Assiale Computerizzata (TAC) permette, attraverso l'elaborazione dell'informazione, la ricostruzione della densità del corpo in esame, in sezioni (bidimensionali) perpendicolari all'asse del sistema di acquisizione.

Vediamo, innanzi tutto di descrivere il processo fisico che sta alla base delle misure tomografiche. Supponiamo di avere un emettitore di raggi-X (tipicamente con energie comprese tra 20 e 150 Kev) che emette N fotoni (monocromatici) per unità di tempo. Il fascio attraversa uno strato di materiale (biologico) di spessore Δx. Un rivelatore posto all'uscita del campione misurerà $N + \Delta N (\Delta N < 0)$ fotoni. Infatti la radiazione X ha interagito con il tessuto e il fascio é stato attenuato.

Nell'intervallo di frequenza tipico utilizzato per le immagini tomografiche, le cause di questo assorbimento sono principalmente due: l'effetto fotoelettrico e l'effetto Compton. Nel primo caso il fotone cede energia, nel secondo viene deviato dalla sua traiettora originale. Questo fenomeno si può rappresentare con un unico coefficiente μ, detto di attenuazione, e si scrive

$$\frac{\Delta N}{N \Delta x} = -\mu \tag{1}$$

In forma differenziale ($\Delta x \to 0$)

$$\frac{dN}{N} = -\mu dx \tag{2}$$

Se μ rimane costante lungo l'intervallo di integrazione si ha

$$\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = -\mu \int_0^x dx \tag{3}$$

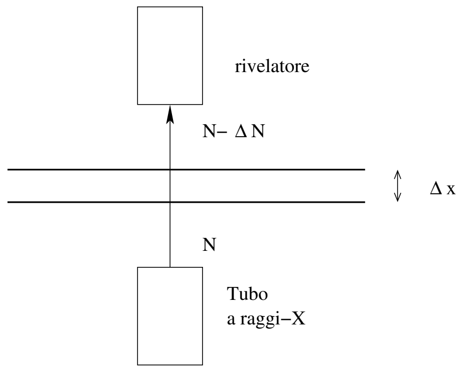

Figura 1: principio fisico dell'assorbimento dei raggi-X

dove N_0 è il numero di fotoni all'ingresso nel materiale. Quindi il numero di fotoni in funzione della posizione nel tessuto (lungo la direzione di propagazione) è dato da:

$$\ln N - \ln N_0 = -\mu x \quad\quad ovvero \quad N(x) = N_0 e^{-\mu x} \tag{4}$$

In generale il coefficiente μ non è uniforme ed è legato alla densità dei tessuti.

Siano $\{x_1, x_2\}$ le coordinate cartesiane che individuano un piano dove giace una generica sezione trasversale del corpo in esame e sia $f(x_1, x_2)$ la funzione (di due variabili) che rappresenta in ogni punto il coefficiente di attenuazione, allora si può scrivere:

$$N_{out} = N_{in} e^{(-\int_L f(x_1,x_2)dl)} \quad\quad ovvero \quad\quad -\int_L f(x_1, x_2)dl = \ln(N_{out}/N_{in}) \tag{5}$$

dove N_{in} è il numero di fotoni in ingresso emessi dalla sorgente (per unità di tempo) e N_{out} quello in uscita e misurati dal rivelatore e con L si indica la linea che descrive il percorso della radiazione all'interno della sezione.

Se ripetiamo ora la misura per un insieme di raggi paralleli, si può definire la *proiezione* dell'oggetto nella direzione di L e tale proiezione può essere vista come una funzione unidimensionale della posizione del rivelatore. Formalizziamo ora la definizione con l'aiuto delle notazioni schematizzate in figura 2.

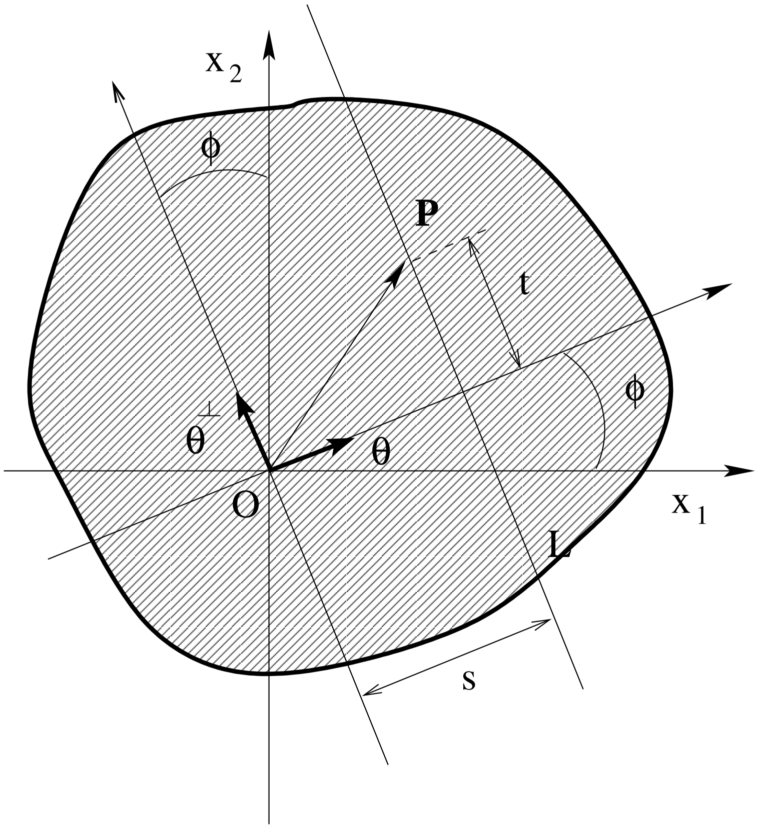

Figura 2: La proiezione in una certa direzione di un oggetto è calcolata come integrali di linea del coefficiente di attenuazione $f(x_1, x_2)$.

- sia P un generico punto della sezione
- sia s la distanza con segno dall'origine O di L
- sia t distanza con segno di P dalla retta per O perpendicolare ad L
- sia $\varphi =$ angolo formato da L con l'asse x_2, $s \in (-\infty, +\infty)$ $\varphi \in [0, 2\pi)$

La retta L lungo la quale viene effettuata l'integrazione può essere scritta come funzione di φ ed s; introducendo i versori

$$\underline{\theta} = (\cos\varphi, \sin\varphi) \quad \underline{\theta}^{\perp} = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$$

si ha

$$(x_1, x_2) \equiv s\underline{\theta} + t\underline{\theta}^{\perp}$$

da cui

$$\int_L f(x_1, x_2) dl = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\underline{\theta} + t\underline{\theta}^{\perp}) dt$$

-DEFINIZIONE
Fissato l'angolo φ, si definisce *proiezione* di f (o *radiografia*) nella direzione θ la funzione definita da

$$(R_{\underline{\theta}} f)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\underline{\theta} + t\underline{\theta}^{\perp}) dt \tag{6}$$

$$(R_{\underline{\theta}} f)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\cos\varphi - t\sin\varphi, s\sin\phi + t\cos\phi) dt \tag{7}$$

-DEFINIZIONE
La trasformata di Radon di f è definita come l'insieme di tutte le proiezioni

$$(Rf)(s, \underline{\theta}) = (R_{\underline{\theta}} f)(s) \tag{8}$$

La trasformata di Radon ha una proprietà di simmetria che ci permette di far variare φ solo nell'intervallo $[0, \pi)$:

$$(Rf)(s, \underline{\theta}) = (Rf)(-s, -\underline{\theta}) \tag{9}$$

Come si può facilmente intuire, nella pratica, la traformata di Radon è nota (misurata) solo su un numero finito di rette (direzioni) e su un numero finito di punti per direzione. L' insieme dei dati raccolti dai rivelatori in ogni direzione è detto (nel caso discreto) *sinogramma.* Il problema della tomografia si riconduce quindi alla ricerca della funzione $f(x_1, x_2)$ dalle sue proiezioni $g(s, \underline{\theta})$, ovvero risolvere la seguente equazione:

$$g(s, \underline{\theta}) = (R\, f)(s, \underline{\theta}) \tag{10}$$

L'equazione precedente può essere riscritta tenendo conto della relazione esistente tra le variabili x_1, y_2 e le variabili s, t, φ

$$x_1 = s\cos\varphi - t\sin\varphi \tag{11}$$

$$x_2 = s\sin\varphi + t\cos\varphi \tag{12}$$

$$g(s, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\cos\varphi - t\sin\varphi, s\sin\varphi + t\cos\varphi) dt \tag{13}$$

Radon, nel 1917, diede una soluzione analitica della (13):

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\pi} \left(P \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{x \cos\varphi + y \sin\varphi - s} \right) \frac{\partial g}{\partial s}(s, \varphi) \right) ds) d\varphi \quad (14)$$

dove P indica il valore principale dell'integrale singolare rispetto alla variabile s e dimostrò l'unicità della soluzione. Tuttavia la (14) non è utilizzabile in pratica per i seguenti motivi:

- è vera soltanto quando i dati sono continui, cosa impossibile nel caso reale data la dimensione finita dei rivelatori;
- il calcolo della derivata di g è un problema mal posto, poichè non è assicurata la dipendenza continua dai dati;
- essendo l'integrando singolare, il procedimento di calcolo potrebbe, in certi casi, non essere convergente; in ogni caso occorrebbe utilizzare formule di quadratura accurate e computazionalmente non convenienti.

Nel seguito verrà illustrata la tecnica di Filtered Back Projection che, basandosi sul teorema di Fourier, permette di ottenere una ricostruzione dei dati sperimentali.

Tecniche di ricostruzione tomografiche

In questo paragrafo verrà analizzato il prolema della ricostruzione di immagini a partire da dati tomografici, senza tuttavia descrivere in modo dettagliato i fenomeni fisici da cui essi hanno origine; in questo modo si porranno le basi teoriche per la comprensione degli algoritmi di ricostruzione utilizzati nel caso di immagini tomografiche.

Il Fourier slice theorem

Il *Fourier slice theorem* fornisce una relazione tra le proiezioni di una funzione e la funzione stessa; esso afferma infatti che la trasformata di Fourier della proiezione di f nella direzione θ ha valori coincidenti con quelli della trasformata di Fourier bidimensionale di f calcolata lungo la retta di direzione θ passante per l'origine dello spazio delle frequenze (fig. 3)

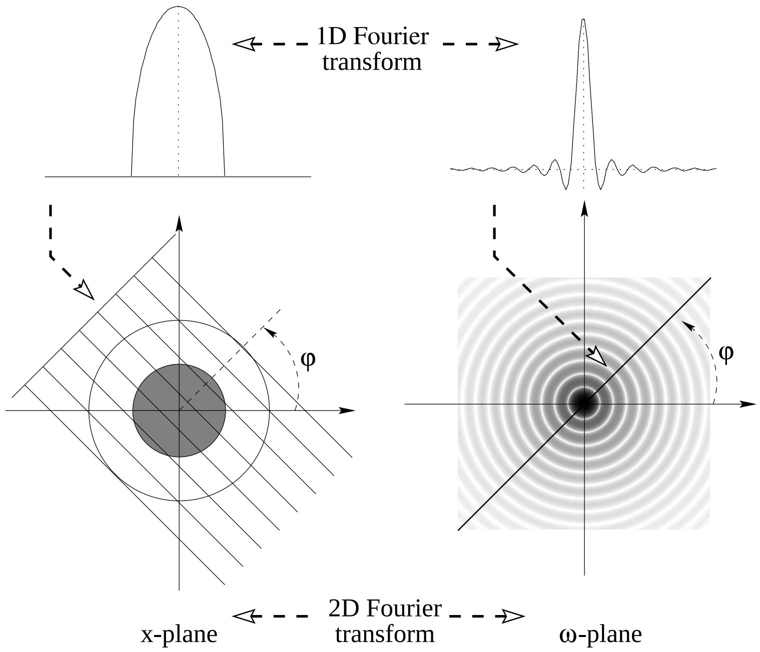

Figura 3: Il Fourier slice theorem afferma che la trasformata di Fourier della proiezione di f nella direzione θ è uguale alla trasformata di Fourier di f calcolata sulla retta di direzione θ passante per l'origine dello spazio delle frequenze.

Sia $\hat{f}(\omega_1, \omega_2)$ la trasformata di Fourier bidimensionale della soluzione $f(x_1, x_2)$ e $\hat{g}_{\underline{\theta}}(\omega)$ la trasformata di Fourier di una proiezione $g_{\underline{\theta}}(s)$. Possiamo scrivere:

$$\hat{g}_{\underline{\theta}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\underline{\theta}}(s) e^{-j\omega s} ds = \tag{15}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega s} (\int_{-\infty}^{+\infty} f(s\cos\phi - t\sin\phi, s\sin\phi + t\cos\phi) dt) ds$$

Utilizzando le variabili x_1, x_2 si ha:

$$s\underline{\theta} + t\underline{\theta}^{\perp} = (s\cos\phi - t\sin\phi, s\sin\phi + t\cos\phi) = (x_1, x_2) = \underline{x}$$

$$dsdt = dx_1 dx_2$$

$$\omega s = \omega\underline{\theta} \cdot \underline{x} \qquad (\textit{poichè } \underline{\theta\theta}^{\perp} = 0)$$

da cui

$$\hat{g}_{\underline{\theta}}(\omega) = \int\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) e^{-j\omega\underline{\theta x}} dx_1 dx_2 = \hat{f}(\omega\underline{\theta}) \tag{16}$$

Il significato di questo teorema, espresso dalla (16) è il seguente: i valori della trasformata di Fourier della proiezione di f lungo la direzione $\underline{\theta}$ coincidono con i valori della trasformata di Fourier di f lungo la retta di direzione $\underline{\theta}$ passante per l'origine del piano ω_1, ω_2. Il risultato precedente fornisce immediatamente un metodo per calcolare la $f(x_1, x_2)$ cercata: considerando le proiezioni per tutti gli angoli e facendone la trasformata di Fourier si possono determinare i valori di $\hat{f}(\omega_1, \omega_2)$ lungo linee radiali (fig. 4).

Per ottenere la soluzione si può quindi applicare l'antitrasformata di Fourier:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega_1, \omega_2) e^{j(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} d\omega_1 d\omega_2 \tag{17}$$

Nella realtà è possibile effettuare solo un numero finito di proiezioni, quindi, la trasformata di Fourier della $f(x_1, x_2)$ sarà nota solo su un numero finito di linee radiali (come in fig. 4). Come sarà successivamente chiarito, per applicare la (17) nel caso discreto, servono i valori di $\hat{f}(\omega_1, \omega_2)$ su di una griglia quadrata, i quali possono essere ottenuti tramite interpolazione dei valori conosciuti; è però necessario notare che alle alte frequenze il risultato di tale approssimazione sarà via via meno preciso, data la particolare disposizione dei valori di $\hat{f}$ noti con esattezza.

A questo punto è necessario definire l'operatore di *retroproiezione*, cioè l'aggiunto di (Rf). Se indichiamo con $f \in X$ un generico elemento dello spazio

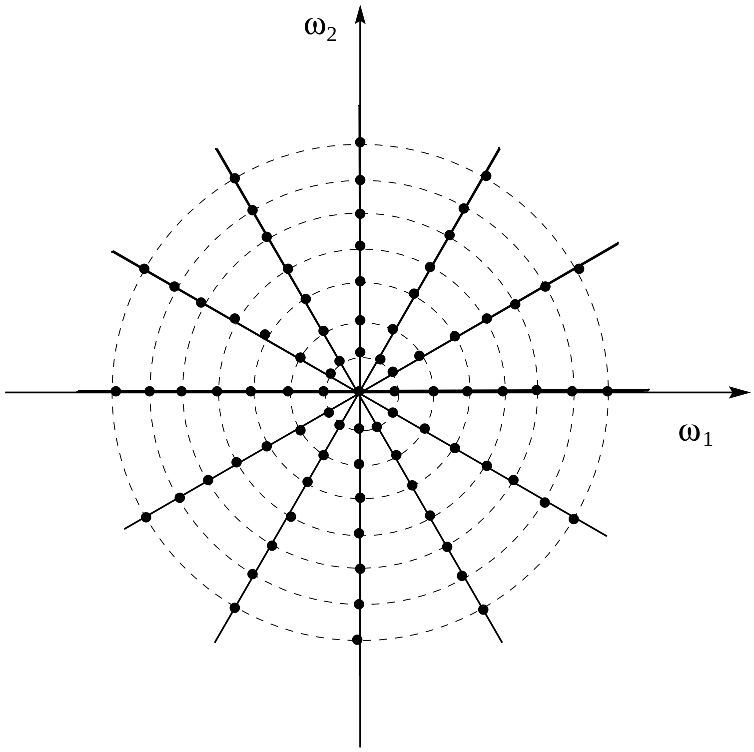

Figura 4: Nel caso discreto il campionamento di $\hat{f}(\omega_1, \omega_2)$ lungo linee radiali causa perdita di precisione alle alte frequenze.

delle immagini e con $g \in Y$ un elemento dello spazio delle proiezioni, è possibile scrivere il prodotto scalare nello spazio Y:

$$(Rf, g)_Y = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} [(Rf)(s, \underline{\theta})g(s, \underline{\theta})ds]\, d\varphi$$

ovvero

$$(Rf, g)_Y = \int_0^\pi \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(s\underline{\theta} + t\underline{\theta}^\perp)dt \right] g(s, \underline{\theta})ds \right\} d\varphi$$

se si sostituiscono le variabili $\{s, t\}$ con $\{x_1, x_2\}$ e si scambia l'ordine di integrazione

$$(Rf, g)_Y = \int \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)[\int_0^\pi g(x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi, \underline{\theta})d\varphi]dx_1 dx_2 = (f, R^{\#}g)_X$$

Quindi

$$(f, R^{\#}g)_X = \int \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)(R^{\#}g)(x_1, x_2)dx_1\, dx_2$$

$$(R^{\#}g)(x_1, x_2) = \int_0^\pi g(x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi, \underline{\theta})d\varphi \tag{18}$$

E' interessante osservare che mentre la trasformata di Radon integra sui tutti i punti di una retta, l'operatore di retroproiezione intrega su tutte le rette che passano per un punto.

Se si applica l'operatore di retroproiezione ai dati si ottiene una versione *blurrata* dell'oggetto. Infatti si può dimostrare che

$$(R^{\#}g)(\underline{x}) = (R^{\#}Rf)(\underline{x}) = 2 \int \frac{f(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d\underline{x}'.$$

La filtered back projection (FBP)

Per evitare il ricorso all'interpolazione si affronta il problema in maniera totalmente diversa. La formula di inversione della trasformata di Fourier

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega_1, \omega_2) e^{j(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} d\omega_1 d\omega_2 \tag{19}$$

utilizzando le coordinate polari definite da

$$\omega_1 = \omega \cos\varphi \qquad \omega_2 = \omega \sin\varphi$$
$$d\omega_1 d\omega_2 = \omega d\omega d\varphi$$

può essere scritta come segue ($0 < \varphi < 2\pi$, $0 < \omega < +\infty$)

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega, \varphi) e^{j\omega(x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi)} \omega d\omega d\varphi$$

L'integrale su φ può essere diviso, considerando prima φ tra 0 e π, poi φ tra π e 2π, e riscritto come segue

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\pi} \left[\int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega, \varphi) e^{j\omega(x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi)} \omega d\omega \right] d\varphi + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\pi} \left[\int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega, \varphi + \pi) e^{j\omega(x_1 \cos(\varphi+\pi) + x_2 \sin(\varphi+\pi))} \omega d\omega \right] d\varphi \end{aligned} \tag{20}$$

grazie alle proprietà della trasformata di Fourier $\hat{f}(\omega, \varphi + \pi) = \hat{f}(-\omega, \phi)$ e sostituendo ω in $-\omega$ si ha

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\pi} \left[\int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega, \varphi) e^{j\omega(x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi)} \omega d\omega \right] d\varphi + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\pi} \left[\int_{-\infty}^{0} \hat{f}(\omega, \varphi) e^{j\omega(x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi)} - \omega d\omega \right] d\varphi \end{aligned} \tag{21}$$

ovvero

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega, \varphi) |\omega| e^{j\omega(x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi)} d\omega \right] d\varphi \tag{22}$$

Ricordando che, per la (16), vale

$$\hat{f}(\omega \underline{\theta}) = \hat{g}_{\underline{\theta}}(\omega)$$

l'equazione precedente può essere riscritta nella seguente:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}_{\underline{\theta}}(\omega) |\omega| e^{j\omega(x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi)} d\omega \right] d\varphi \tag{23}$$

Nella (23) è presente un'operazione di filtraggio delle proiezioni, in cui il filtro è rappresentato da $|\omega|$. Tale filtro è detto *a rampa*, amplifica le alte frequenze e con loro il rumore eventualmente presente sulle proiezioni. Poichè nella realtà non si verificano mai condizioni di assenza di rumore, gli effetti sulla soluzione di questo filtraggio possono essere disastrosi. Per evitare tale inconveniente vengono impiegati, assieme al filtro a rampa, filtri passabasso (ad es. di Butterworth o di Hanning).

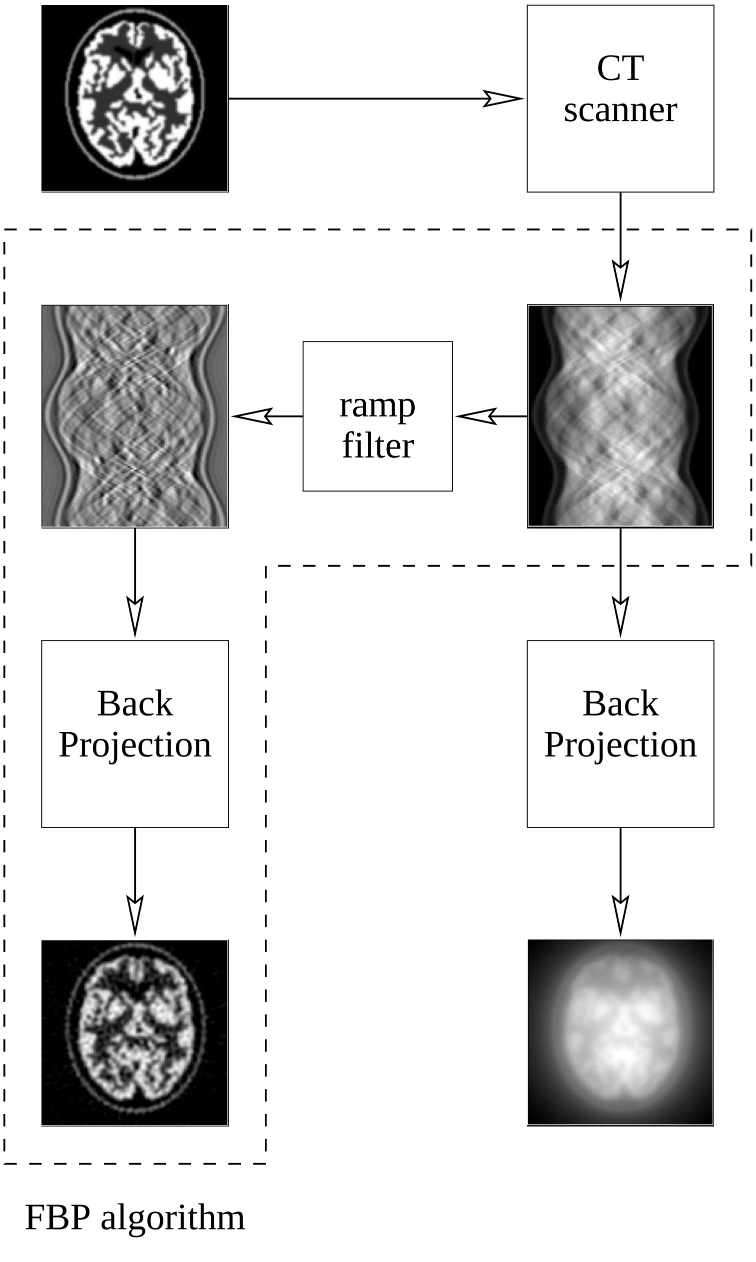

Figura 5: Schema del procedimento base della Filtered Back Projection