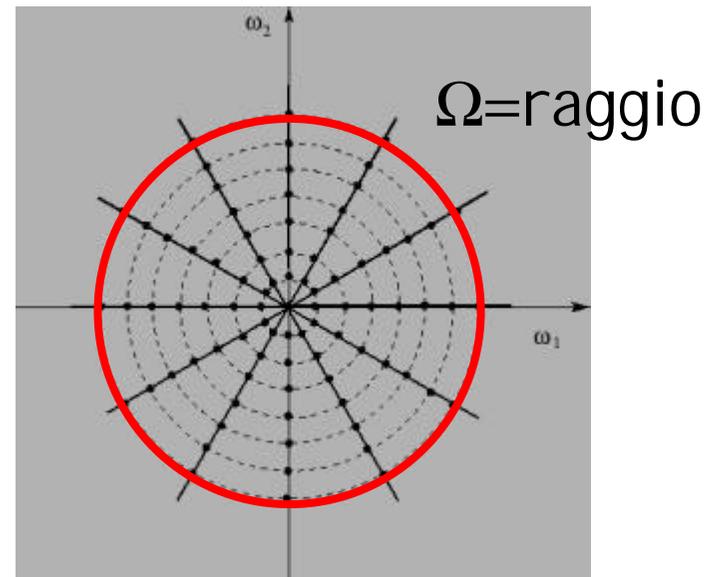


# Risoluzione in tomografia

Abbiamo accennato che una causa di disturbo in tomografia sono i dati insufficienti. Vediamo di approfondire l'argomento, cercando di capire come viene campionato il piano di Fourier.

Ogni proiezione di lunghezza  $D$  è campionata in  $N$  punti, ovvero

$$\Delta s = \frac{D}{N} \Rightarrow \Omega = \frac{p}{\Delta s} = \frac{p}{D} N \Rightarrow$$

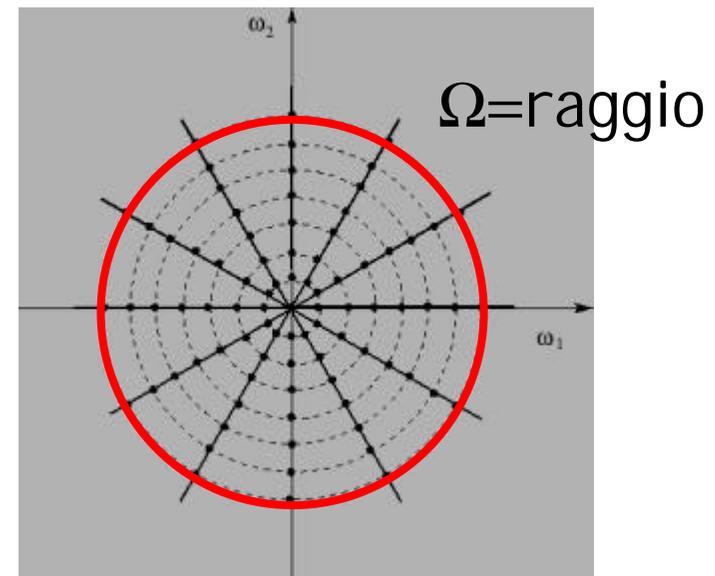


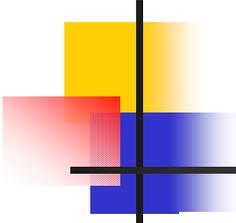
# Risoluzione in tomografia

Oltre ad avere un campionamento delle proiezioni che è determinato essenzialmente dal numero di punti per proiezione ovvero dal numero di rivelatori, abbiamo anche un campionamento angolare.

L'intervallo di campionamento nelle frequenze radiali è:

$$\Delta \mathbf{w}_s = \frac{2\Omega}{N} \quad \Rightarrow \quad \Delta \mathbf{w}_s \approx \Omega \frac{p}{p}$$





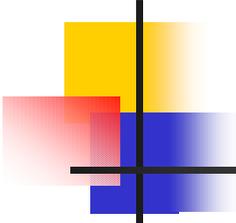
# Risoluzione in tomografia

---

Questo significa che c'è un rapporto ottimale tra numero di punti per proiezione e numero di proiezioni. Non serve aumentare uno se non si aumenta l'altro.

$$\Delta \mathbf{w}_s = \Omega \frac{\mathbf{p}}{p} \Rightarrow \frac{2\Omega}{N} = \Omega \frac{\mathbf{p}}{p} \Rightarrow \frac{2}{N} = \frac{\mathbf{p}}{p} \Rightarrow N = \frac{2}{3} p$$

In questo modo possiamo "progettare" una TAC, ma da queste considerazioni si può anche determinare la risoluzione (l'estensione degli oggetti più piccoli) che avrà la nostra macchina; facciamo un esempio numerico



# Risoluzione in tomografia

---

Pensiamo ad una tipica TAC: il diametro dell'area di ricostruzione (della zona del cranio) è intorno ai 40 cm, calcoliamo ora quanti punti per proiezione e quante proiezioni devo avere per ottenere la risoluzione di 1 mm.

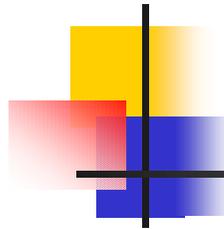
Calcolare il numero di rivelatori è banale  $400\text{mm}/1\text{mm} = 400$

Ovvero il pixel avrà lato=1mm (si può fare ... ma)

$$N = \frac{2}{3} p$$

$$p = \frac{3}{2} N = 600$$

600 proiezioni su 180 gradi = 0.3 gradi !!!!



# Dati insufficienti

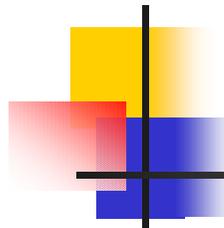
---

Se ci sono pochi dati (radiali o angolari) significa che stiamo sottocampionando il piano di Fourier.

Il sotto-campionamento si manifesta con artefatti che disturbano la ricostruzione.

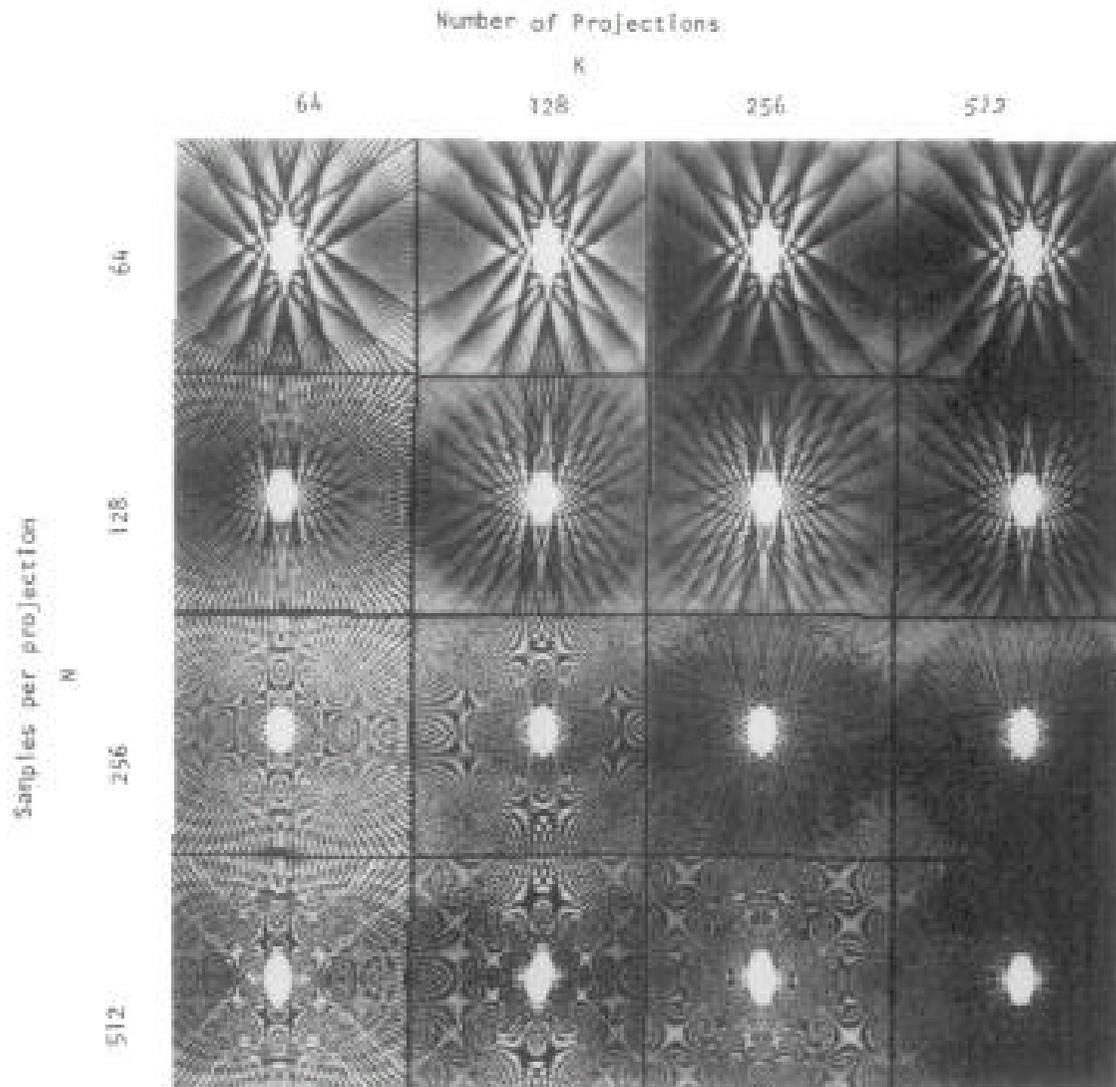
Ci sono due cause distinte:

- il sotto-campionamento delle proiezioni (pochi punti per proiezione, non si può curare con tante proiezioni)
- poche proiezioni, ovvero un sotto-campionamento angolare **della trasformata di Fourier** (non si può curare con tanti punti per proiezione)



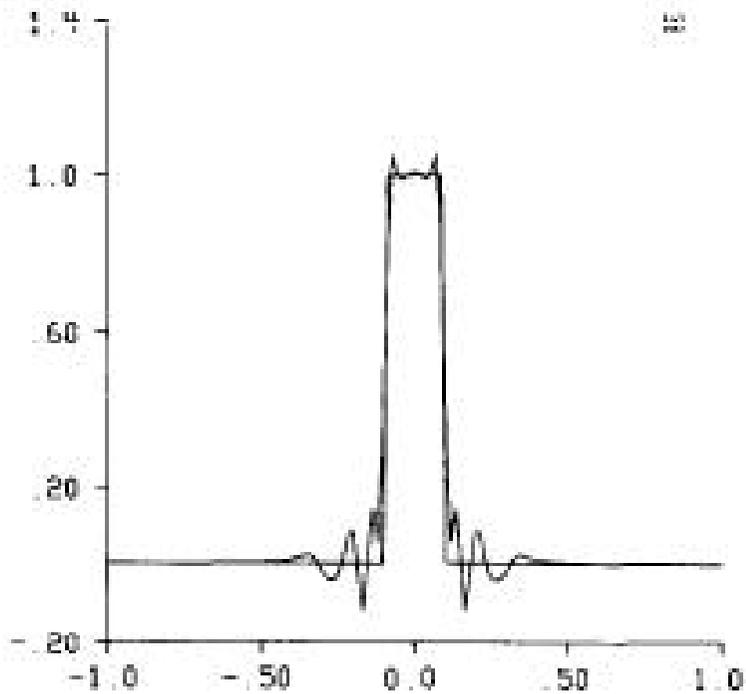
# Aliasing

Esempio di ricostruzione di una ellisse con diversi valori di  $N-p$

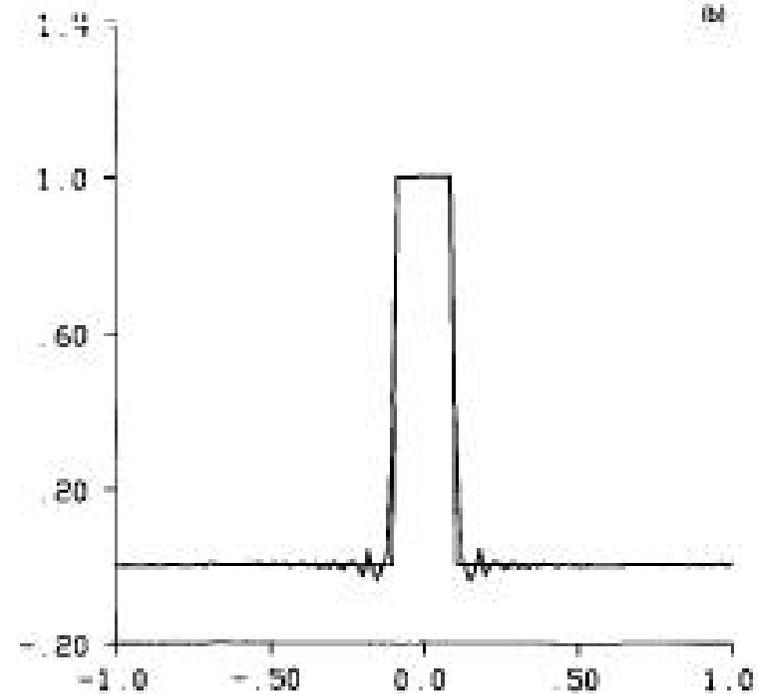


A. C. Kak and Malcolm Slaney, *Principles of Computerized Tomographic Imaging*, Society of Industrial and Applied Mathematics, 2001

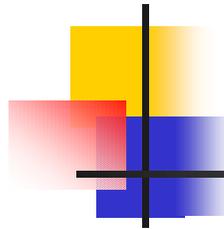
# Aliasing



$N=64, p=512$



$N=512, p=512$



# Aliasing

---

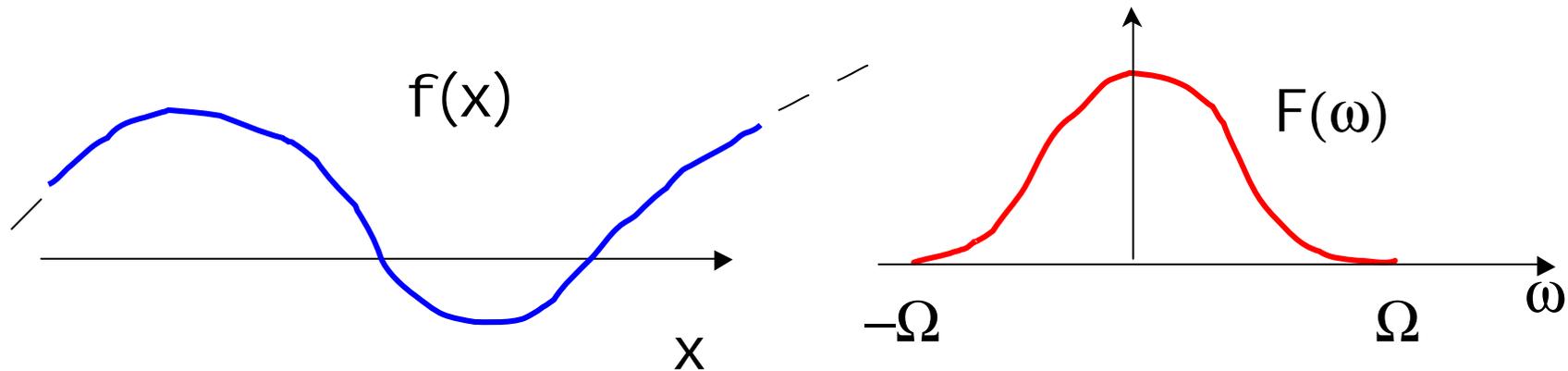
Il problema fondamentale in tomografia è che gli oggetti da ricostruire sono “spazio limitati” e quindi in realtà **non sono a banda limitata**.

Dato che la ricostruzione è ovviamente discretizzata (campionata) sarà una versione a banda limitata dell'oggetto da ricostruire.

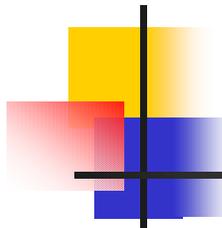
Nei lucidi seguenti diamo una spiegazione intuitiva dell'aliasing dovuto al sotto-campionamento.

# Aliasing

Consideriamo un segnale  $f(x)$  a banda limitata, ovviamente questo segnale non sarà spazio limitato

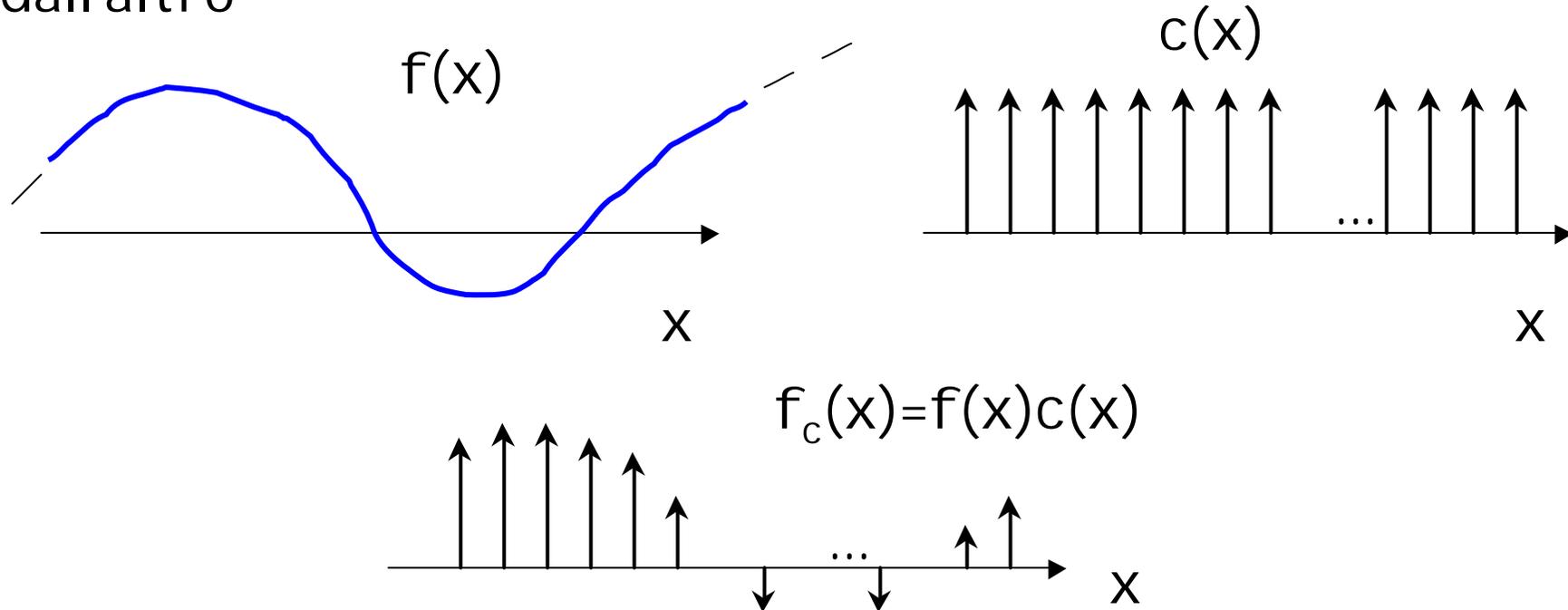


$$F(\omega) = 0 \quad \text{per } |\omega| \geq \Omega$$



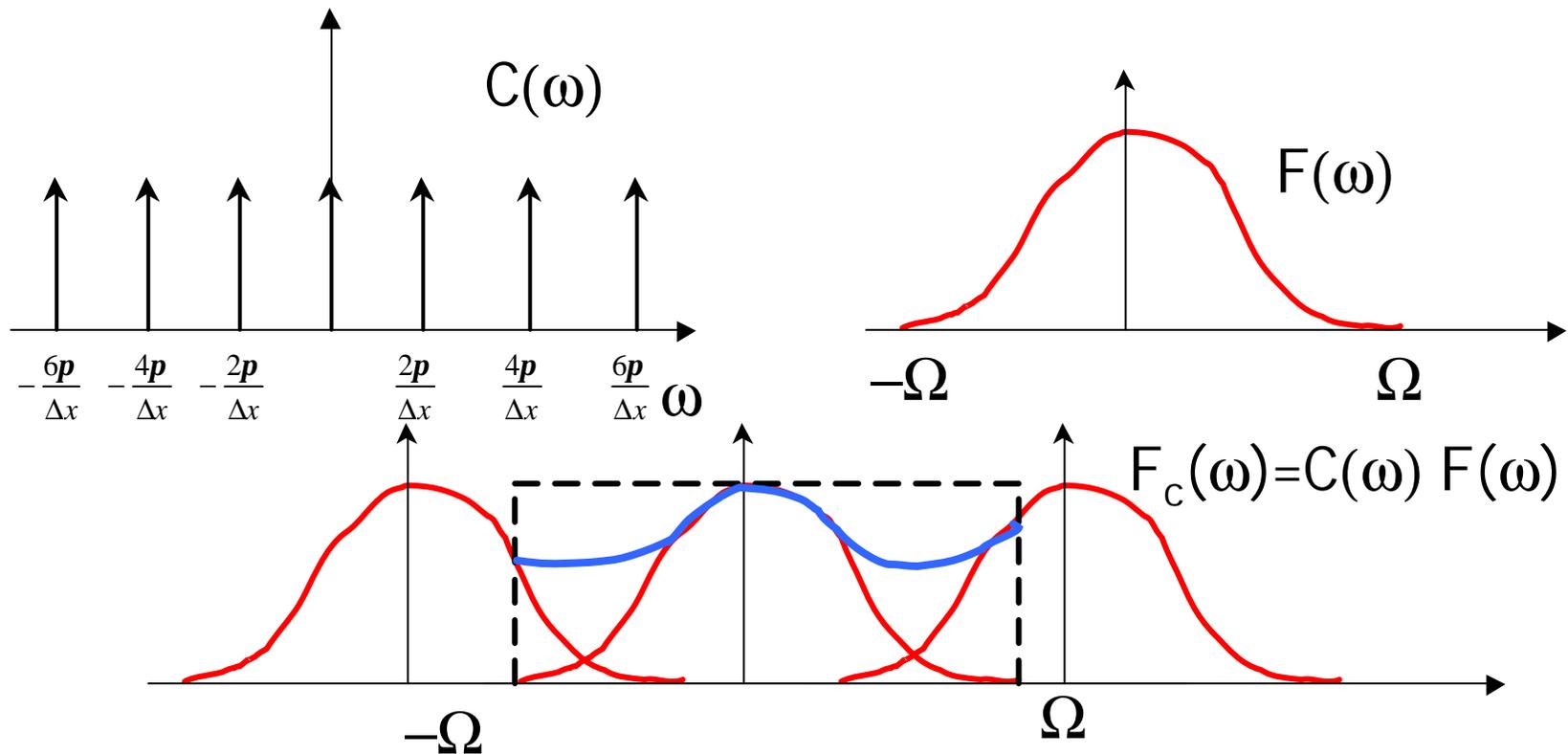
# Aliasing

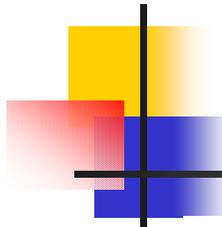
Vogliamo ora campionare il segnale, e possiamo vedere il campionamento come la moltiplicazione del segnale per una serie di impulsi (pettine di Dirac) a distanza  $\Delta x$  l'uno dall'altro



# Aliasing

La trasformata di Fourier della  $c(x)$  è a sua volta una funzione a pettine nelle frequenze

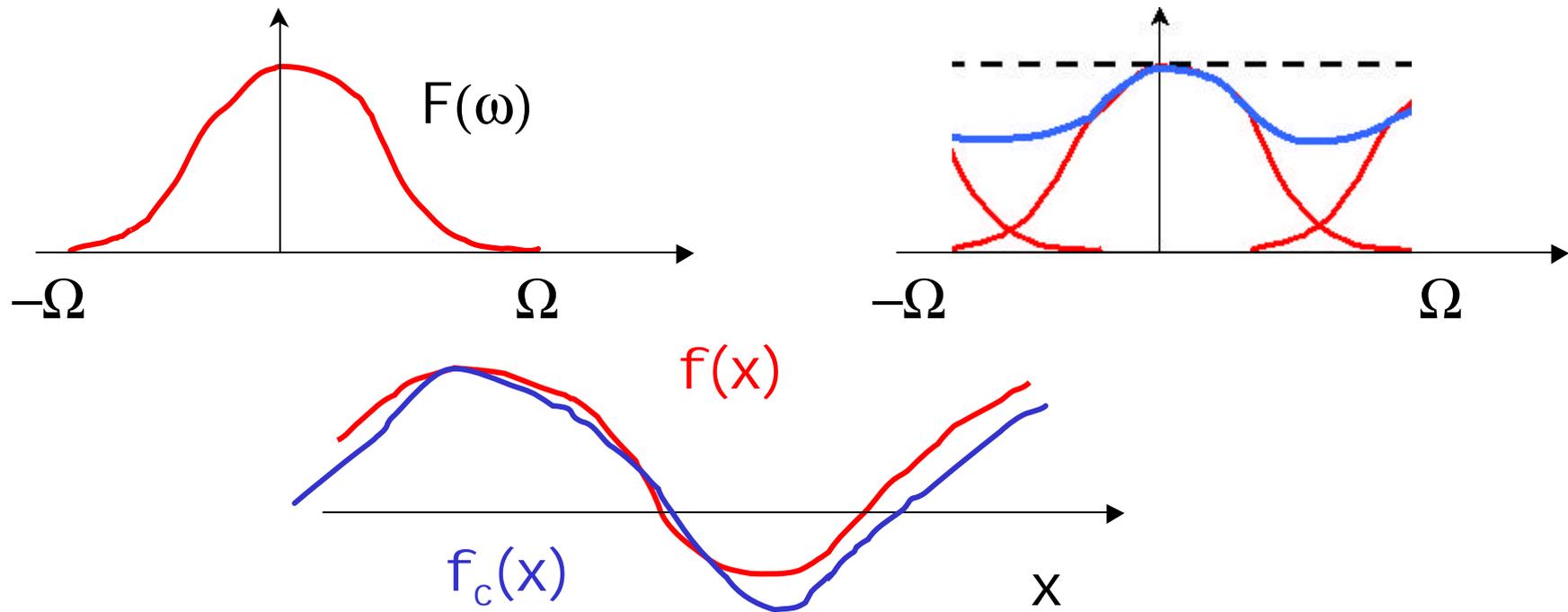


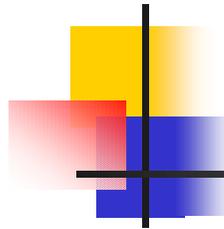


# Aliasing

L' antitrasformata di Fourier della funzione campionata sarà diversa dalla funzione originale,

$$F_c(\omega) = C(\omega) F(\omega)$$





# Aliasing

---

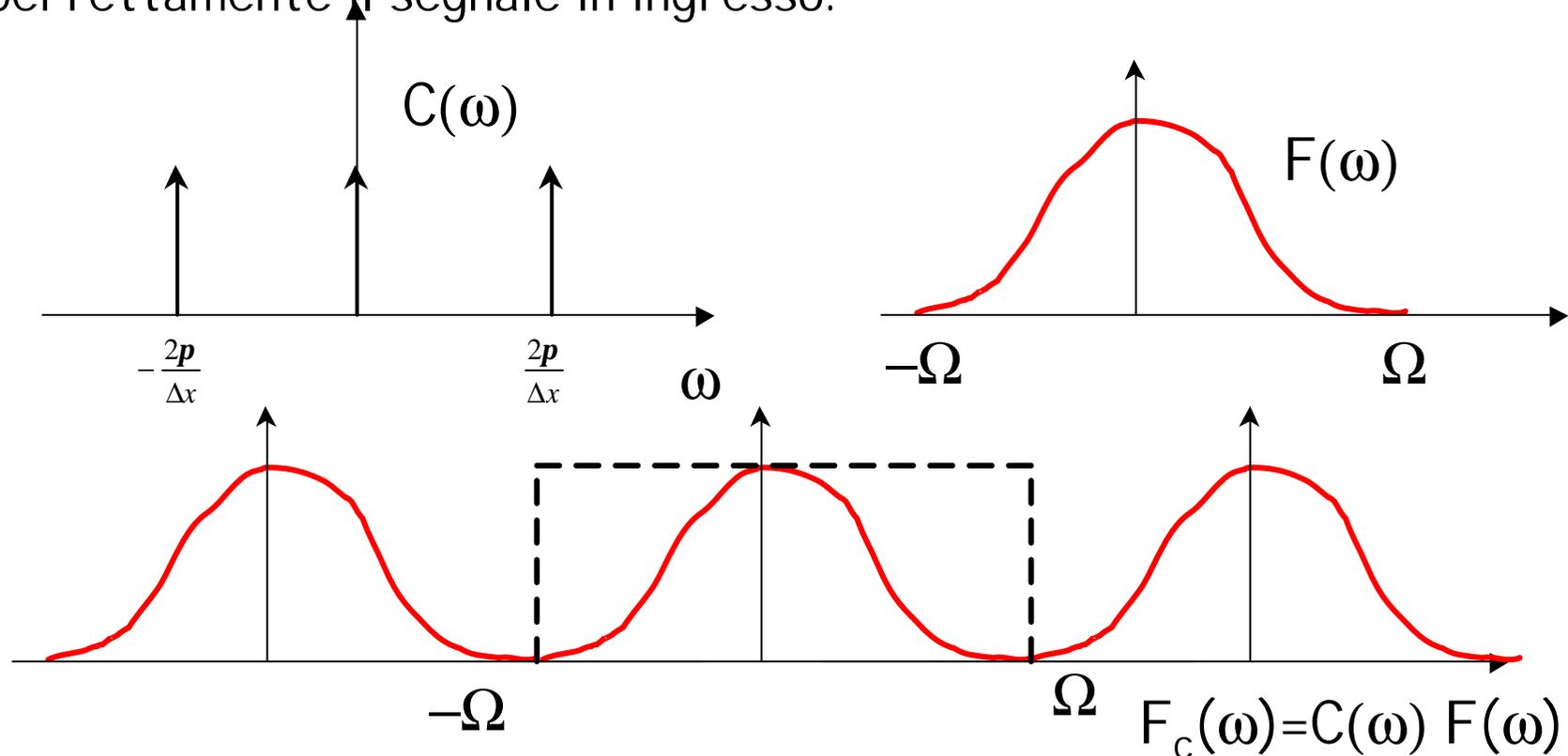
L'errore sulla rappresentazione della funzione originale sarà molto più alto quanto più gli spettri di Fourier si sovrappongono. In pratica agli estremi della banda si sono aggiunte delle frequenze già presenti nel segnale ma "ripiegate"

Questo è dovuto al fatto che non è stato rispettato il teorema del campionamento.

- Sottocampionamento
- Segnali non a banda limitata

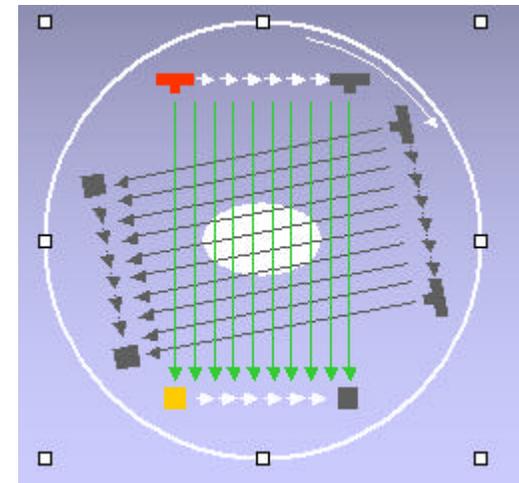
# Aliasing

Se si diminuisce  $\Delta x$  e quindi si aumenta il "passo" in Fourier della  $C(\omega)$ , nel caso di segnale a banda limitata, ricostruisco perfettamente il segnale in ingresso.



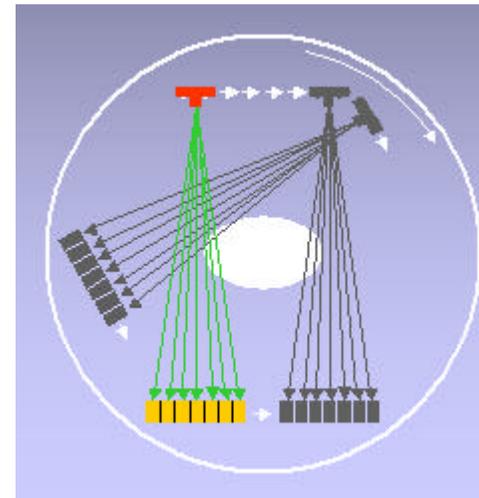
# Alcuni dati: prima generazione

- EMI Mark I (Hounsfield), "pencil beam" or parallel-beam scanner
- 180° - 240° angolo di rotazione a passi di  $\sim 1^\circ$
- Usato per osservazioni del cranio
- Tempo di scansione 5-min, tempo di ric. 20-min
- Risoluzione originale:  $80 \times 80$  pixels (ea.  $3 \times 3 \text{ mm}^2$ ),
- Spessore della fetta 13-mm



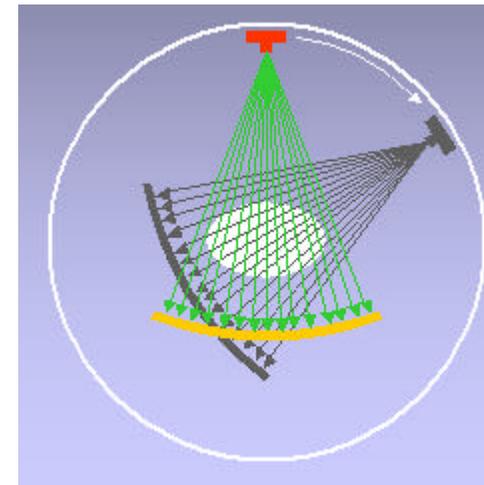
# Seonda generazione

- Sistema ibrido: Fan beam + array lineari (~30 rivelatori)
- Translazione e rotatione
- Numero ridotto di angoli di vista  $\Rightarrow$  tempo di scansione ~30 s
- Algoritmi di ricostruzione più complessi per la geometria "fan"



# Terza generazione

- Ventagli ("fan") molto ampi coprono tutto l'oggetto
- 500-700 rivelatori(camered ad ionizzazione o scintillatori)
- Non è richiesta traslazione  $\Rightarrow$  Tempo di acquisizione qualche secondo (riduzione della dose e degli artefatti dovuti al movimento)
- Tempo di ricostruzione pochi secondi
- Sorgenti pulsate (riduzione dose e riscaldamento dei tessuti)



# Quarta generazione

- Anello di rivelatori stazionario (600 – 4800 scintillatori)
- Tubo a raggi-x rotante
- Tempo di scansione e tempo di ricostruzione pochi secondi
- Spessore della fetta 1mm

