Spazi vettoriali e spazi di funzioni

M. Bertero – DISI - Università di Genova

- **Spazi vettoriali complessi**
- **Operatori lineari in spazi vettoriali complessi e matrici**
- **Estensione al caso 2D**
- **Spazi lineari di funzioni**
- **Operatori lineari in spazi di funzioni**

1 – Spazi vettoriali complessi

Un *vettore complesso di lunghezza* N è una N-upla ordinata di numeri complessi: $\underline{f} = \{f[1], \ldots, f[N]\}$. L'insieme di tutti i vettori complessi forma uno spazio lineare sui complessi se somma di due vettori e prodotto di un vettore per un numero complesso λ sono definiti nel modo naturale:

$$\underline{f} + \underline{h} = \{f[1], \ldots, f[N]\} + \{h[1], \ldots, h[N]\} = \{f[1] + h[1], \ldots, f[N] + h[N]\} \ ,$$

$$\lambda \, \underline{f} = \lambda \{f[1], \ldots, f[N]\} = \{\lambda \, f[1], \ldots, \lambda \, f[N]\} \ .$$

L'elemento nullo è ovviamente il vettore complesso le cui componenti sono tutte nulle.

E' facile verificare che somma e prodotto soddisfano alle solite proprietà (commutatività, associatività, distributività ecc.); è inoltre facile verificare che esistono al più N vettori linearmente indipendenti e pertanto l'insieme di tutti i vettori complessi di lungezza N forma uno *spazio lineare di dimensione* N.

Si può dare una struttura di *spazio Euclideo* ad uno spazio di vettori complessi di lunghezza N se si definisce un *prodotto scalare* di due vettori complessi nel modo seguente:

$$\left(\underline{f}, \underline{h}\right) = \sum_{n=1}^{N} f[n] \, h[n]^* \ ,$$

dove * indica coniugazione complessa. Si verifica facilmente che esso gode delle seguenti proprietà:

- $\left(\underline{f}, \underline{f}\right) \geq 0, \ = 0 \ \Leftrightarrow \ f = 0 \ ;$
- $\left(\underline{f}, \underline{h}\right) = \left(\underline{h}, \underline{f}\right)^* \ ;$
- $\left(\lambda \, \underline{f}, \underline{h}\right) = \lambda \left(\underline{f}, \underline{h}\right) \ ;$
- $\left(\underline{f}_1 + \underline{f}_2, \underline{h}\right) = \left(\underline{f}_1, \underline{h}\right) + \left(\underline{f}_2, \underline{h}\right) \ .$

Da queste seguono anche le seguenti altre:

- $\left(\underline{f}, \lambda \, \underline{h}\right) = \lambda^* \left(\underline{f}, \underline{h}\right) \ ;$
- $\left(\underline{f}, \underline{h}_1 + \underline{h}_2\right) = \left(\underline{f}, \underline{h}_1\right) + \left(\underline{f}, \underline{h}_2\right) \ .$

Il prodotto scalare precedentemente definito induce la norma seguente:

$$\| \underline{f} \| = \left(\underline{f}, \underline{f}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^{N} | f[n] |^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ .$$

Essa gode delle seguenti proprietà:

- $\| \underline{f} \| \geq 0, \ = 0 \ \Leftrightarrow \ \underline{f} = 0 \ ;$
- $\| \lambda \, \underline{f} \| = |\lambda| \| \underline{f} \| \ ;$
- $\| \underline{f} + \underline{h} \| \leq \| \underline{f} \| + \| \underline{h} \| \ \text{(dis. triangolare)} \ ;$

la diseguaglianza triangolare segue dalla diseguaglianza di Schwartz (vedi slide successiva). La norma di un vettore complesso permette di definire la distanza tra due vettori complessi nel modo seguente:

$$\rho\left(\underline{f}, \underline{h}\right) = \| \underline{f} - \underline{h} \| \ .$$

Grazie ad essa si possono definire insiemi chiusi e aperti di vettori complessi, limiti di successioni di vettori complessi, ecc.

La diseguaglianza di Schwarz :

$$|\left(\underline{f},\underline{h}\right)| \le \| \underline{f} \| \| \underline{h} \| \quad .$$

Dimostrazione – Se uno dei due vettori è l'elemento nullo la diseguaglianza è banalmente vera. Altrimenti, si osservi che, per ogni numero complesso λ, si ha:

$$0 \le \| \underline{f} + \lambda \underline{h} \|^2 = \| \underline{f} \|^2 + \lambda^* \left(\underline{f},\underline{h}\right) + \lambda \left(\underline{f},\underline{h}\right)^* + |\lambda|^2 \| \underline{h} \|^2 \quad .$$

Se in questa diseguaglianza si pone:

$$\lambda = -\frac{\left(\underline{f},\underline{h}\right)}{\| \underline{h} \|^2} \quad ,$$

con un pò di algebra elementare si ottiene la diseguaglianza di Schwartz.

Si indicherà con $\mathcal{E}^N$ lo spazio dei vettori complessi di lunghezza N.

Due vettori si dicono *ortogonali* se il loro prodotto scale è nullo. Un insieme di **vettori ortonormali** è un insieme di vettori a due a due ortogonali con norma 1. Se si indicano con $\underline{u}_k$ tali vettori, essi soddisfano la condizione:

$$\left(\underline{u}_k,\underline{u}_j\right) = \delta_{k,j} \quad ,$$

dove $\delta_{k,j}$ è il simbolo di Kronecker, eguale a 1 quando k=j ed eguale a 0 quando k diverso da j.

Un insieme di N vettori ortonormali forma una **base** in $\mathcal{E}^N$ dato che ogni vettore $\underline{f}$ può essere rappresentato nel modo seguente:

$$\underline{f} = \sum_{k=1}^{N} c[k]\underline{u}_k \quad , \qquad c[k] = \left(\underline{f},\underline{u}_k\right) \quad .$$

Si ha infatti:

$$\left(f,\underline{u}_k\right) = \left(\sum_{j=1}^{N} c[j]\underline{u}_j,\underline{u}_k\right) = \sum_{j=1}^{N} c[j]\left(\underline{u}_j,\underline{u}_k\right) = c[k] \ .$$

Esempi di basi

1 – La base canonica – E' formata dai vettori con una sola componente diversa da zero ed eguale a 1. Più esattamente si ha:

$$\underline{u}_k^{(C)}[n] = \delta_{k,n} \qquad .$$

La rappresentazione di un vettore generico è data da:

$$\underline{f} = \sum_{k=1}^{N} f[k]\,\underline{u}_k^{(C)} \qquad .$$

2 – La base di Fourier – E' formata dai vettori:

$$\underline{u}_k^{(F)}[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\frac{2\pi}{N}kn} \quad .$$

Dalla teoria della DFT si ha:

$$\underline{f} = \sum_{k=0}^{N-1} c[k]\underline{u}_k^{(F)} \quad , \quad c[k] = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\underline{f},\underline{u}_k^{(F)}\right) = \frac{1}{N}F[k] \ .$$

Eguaglianza di Parseval – Se c[k] e d[k] sono le componenti dei vettori f e h rispetto alla base u_k, valgono le seguenti relazioni:

$$\left(f,h\right) = \sum_{k=1}^{N} c[k]\,d[k]^*$$

$$\left\|\underline{f}\right\|^2 = \sum_{k=1}^{N} \left|c[k]\right|^2 \quad .$$

Dimostrazione – La seconda segue dalla prima. Per dimostrare questa, si rappresenti f nella base u_k; si ha:

$$\left(f,h\right) = \left(\sum_{k=1}^{N} c[k]\underline{u}_k,h\right) = \sum_{k=1}^{N} c[k]\left(\underline{u}_k,h\right) = \sum_{k=1}^{N} c[k]\,d[k]^* .$$

Come caso particoolare si ottiene l'eguaglianza di Parseval della DFT:

$$\sum_{n=0}^{N-1} f[n]\,h[n]^* = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F[k]\,H[k]^* \ .$$

2 – Operatori lineari in spazi vettoriali complessi e matrici

Un *operatore* nello spazio vettoriale $\mathcal{E}^N$ è una funzione definita su $\mathcal{E}^N$ a valori in $\mathcal{E}^N$. Se si indica con A la funzione e se g è l'immagine di f data da A, si scriverà, in generale, g=A(f).

Un operatore A dicesi *lineare* se soddisfa alla condizione seguente, per ogni coppia di vettori e per ogni coppia di numeri complessi:

$$A\left(\lambda_1 \underline{f}_1 + \lambda_2 \underline{f}_2\right) = \lambda_1 A\left(\underline{f}_1\right) + \lambda_2 A\left(\underline{f}_2\right) \quad .$$

Per un operatore lineare si usa la notazione semplificata A f; pertanto si scriverà:

$$\underline{g} = A \underline{f} \qquad ,$$

se g è l'immagine di f data da A.

Dalla rappresentazione di f in una base u_k si ha:

$$\underline{g} = A \underline{f} = A\left(\sum_{j=1}^{N} c[j]\underline{u}_j\right) = \sum_{j=1}^{N} c[j] A\underline{u}_j \quad ;$$

quindi, se d[k] sono le componenti di g rispetto alla stessa base, si ottiene:

$$d[k] = \left(\underline{g}, \underline{u}_k\right) = \sum_{j=1}^{N} \left(A\underline{u}_j, \underline{u}_k\right) c[j] \quad .$$

Ad A è quindi associata una matrice nella base u_k:

$$A^{(u)}[k, j] = \left(A\underline{u}_j, \underline{u}_k\right) \quad .$$

E' ovvio che ad uno stesso operatore lineare A sono associate tante matrici quante sono le possibili basi. Si indicherà con A[n,n'] la **matrice associata alla base canonica**:

$$A[k, j] = \left(Au_j^{(C)}, u_k^{(C)}\right) ,$$

da cui:

$$\left(A \underline{f}\right)[n] = \sum_{n'=1}^{N} A[n, n'] \, f[n'] \; .$$

Alcune definizioni

1 - L' **aggiunta** di una matrice A, indicata con A*, è la complessa coniugata della sua trasposta; si ha quindi:

$$A^*[n,n'] = A[n',n]^* \quad .$$

La matrice aggiunta gode delle seguenti proprietà:

$$(Af,h) = (f,A^*h) \quad , \quad (A^*f,h) = (f,Ah) \quad .$$

2 - Una matrice A si dice **autoaggiunta** se coincide con la sua aggiunta:

$$A[n,n'] = A[n',n]^* \quad ;$$

pertanto gli elementi diagonali di una matrice autoaggiunta sono reali mentre quelli simmetrici rispetto alla diagonale sono tra loro complessi coniugati. Si ha inoltre:

$$(Af, h) = (f, Ah) \quad .$$

Le matrici autoaggiunte sono l'estensione al caso complesso delle matrici simmetriche nel caso reale.

3 - Una matrice U si dice **unitaria** se soddisfa le condizioni:

$$U^*U = UU^* = I \quad ,$$

dove I è la matrice identica. Una matrice unitaria trasforma un vettore in un altro che ha la stessa norma. Più in generale una matrice unitaria non cambia i prodotti scalari ra vettori. Si ha infatti:

$$\left(U\underline{f}, U\underline{h}\right) = \left(U^*U\underline{f}, \underline{h}\right) = \left(\underline{f}, \underline{h}\right) .$$

E' facile verificare che le colonne di una matrice unitaria formano una base. Altrettanto dicasi delle sue righe. Si scriva la matrice U nella forma seguente:

$$U = \left(\underline{u}_1 \;\; \underline{u}_2 \; ..... \; \underline{u}_N\right) ;$$

è facile vedere che si ha:

$$\underline{u}_k = U\underline{u}_k^{(C)} \quad , \quad \left(\underline{u}_k, \underline{u}_j\right) = \left(U\underline{u}_k^{(C)}, U\underline{u}_j^{(C)}\right) = \left(\underline{u}_k^{(C)}, \underline{u}_j^{(C)}\right) = \delta_{k,j} \, .$$

Le matrici unitarie sono l'estensione al caso complesso delle matrici ortogonali nel caso reale.

4 - Una matrice A si dice di **Toeplitz** se i suoi elementi lungo le diagonali sono costanti; ciò significa che, per ogni coppia di indici n, n'= 1, 2, ..., N-1, si ha:

$$A[n+1, n'+1] = A[n, n'] \quad .$$

Si riconosce facilmente che esiste una corrispondenza biunivoca tra matrici di Toeplitz N x N e vettori di lunghezza 2N - 1. Se si indica con h[k] , k = -N, -N+1,.....,-1, 0, 1, ..., N-1, N, un tale vettore, si ha A [k , j]= h[j - k], o anche:

$$A = \begin{pmatrix} h[0] & h[-1] & h[-2] \; .\,.\,.\,. & h[-N+2] & h[-N+1] \\ h[1] & h[0] & h[-1] \; .\,.\,.\,. & h[-N+3] & h[-N+2] \\ h[2] & h[1] & h[0] \; .\,.\,.\,. & h[-N+4] & h[-N+3] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ h[N-2] & h[N-3] & h[N-4] \; .\,.\,.\,. & h[0] & h[-1] \\ h[N-1] & h[N-2] & h[N-3] \; .\,.\,.\,. & h[1] & h[0] \end{pmatrix}$$

5 – Una matrice di Toeplitz si dice **circolante** se il vettore h[n] soddisfa la condizione h[n-N]=h[n] per n = 0, 1, …, N-1. Pertanto esse sono associate a vettori di lunghezza N e prendono la forma seguente:

$$A = \begin{pmatrix} h[0] & h[N-1] & h[N-2] \; .\,.\,.\,. & h[2] & h[1] \\ h[1] & h[0] & h[N-1] \; .\,.\,.\,. & h[3] & h[2] \\ h[2] & h[1] & h[0] \; .\,.\,.\,. & h[4] & h[3] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h[N-2] & h[N-3] & h[N-4] \; .\,.\,.\,. & h[0] & h[N-1] \\ h[N-1] & h[N-2] & h[N-3] \; .\,.\,.\,. & h[1] & h[0] \end{pmatrix}$$

Si riconosce facilmente che una matrice circolante è associata ad un prodotto di convoluzione ciclico:

$$A\,\underline{f} = \underline{h} * \underline{f} \quad .$$

Le matrici circolanti sono diagonali nella base di Fourier. Si verifica facilmente che, se A è una matrice circolante, allora si ha:

$$A\,\underline{u}_k^{(F)} = H[k]\,\underline{u}_k^{(F)} \quad ,$$

dove H[k] è la trasformata di Fourier discreta (DFT) di h[n]:

$$H[k] = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]\, e^{-i\frac{2\pi}{N}k\,n} \quad .$$

Si introduca la matrice diagonale H, i cui elementi diagonali sono i valori della DFT H[k]:

$$H = \begin{pmatrix} H[0] & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & H[1] & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & H[N-1] \end{pmatrix} \quad .$$

Si introduca inoltre la matrice unitaria le cui colonne sono formate dai vettori della base di Fourier:

$$U^{(F)} = \left(\underline{u}_0^{(F)} \;\; \underline{u}_1^{(F)} \ldots\ldots \;\; \underline{u}_{N-1}^{(F)} \right) .$$

Si verifica facilmente che si ha:

$$A = U^{(F)} H \left(U^{(F)} \right)^{*} \quad ,$$

che è appunto la diagonalizzazione della matrice circolante A. La decomposizione precedente è equivalente alla seguente **rappresentazione spettrale** di A:

$$A\,\underline{f} = \sum_{k=0}^{N-1} H[k] \left(\underline{f}, \underline{u}_k^{(F)} \right) \underline{u}_k^{(F)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} H[k]\, F[k]\, \underline{u}_k^{(F)} \quad ,$$

che può anche essere ottenuta direttamente dalla formula di inversione della DFT. Da questa rappresentazione risulta evidente che A è diagonale nella base di Fourier.

3 – Estensione al caso 2D

Nel caso di immagini digitali bidimensionali è usuale scrivere tali immagini come tabelle a due indici:

$$\underline{f} \quad \rightarrow \quad f[m,n] \quad , \quad m=1,....,M;\, n=1,....,N \quad .$$

E' del tutto naturale introdurre un prodotto scalare come segue:

$$\left(\underline{f},\underline{h}\right)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} f[m,n]\,h[m,n]^{*} \quad .$$

Si ottiene uno spazio Euclideo a dimensione M x N. Il caso più frequente è M=N. Per semplicità ci limitiamo a questo caso.

Si possono ottenere tabelle mediante prodotti tensoriali di vettori, definiti da:

$$\left(\underline{f}_1 \otimes \underline{f}_2\right)[m,n]= f_1[m]\,f_2[n] \quad .$$

Si possono ottenere basi rtonormali come prodotti tensoriali di basi ortonormali nello spazio a dimensione N. In particolare si ottiene cosi' la base canonica:

$$\underline{u}_{k,j}^{(C)}[m,n]=\left(\underline{u}_k^{(C)}\otimes\underline{u}_j^{(C)}\right)[m,n]=\underline{u}_k^{(C)}[m]\,\underline{u}_j^{(C)}[n]=\delta_{k,m}\delta_{j,m} \,,$$

e la base di Fourier:

$$\underline{u}_{k,j}^{(F)}[m,n]=.\left(\underline{u}_k^{(F)}\otimes\underline{u}_j^{(F)}\right)[m,n]=\frac{1}{N}e^{i\frac{2\pi}{N}(k\,m+j\,n)} \,.$$

Agli operatori lineari corrispondono ora tabelle a quattro indici che, quando riferite alla base canonica, scriveremo nella forma:

$$A[m,n;m',n'] \,.$$

Come nel caso 1D si definisce la matrice aggiunta. Si possono poi definire sia le matrici autoaggiunte che le matrici unitarie.

Una matrice **circolante a blocchi con blocchi circolanti**, è una matrice che ha la struttura di una matrice circolante dove però ogni elemento h[k] è a sua volta una matrice circolante. Pertanto una tale matrice è una matrice a quattro indici, che opera su tabelle a due indici:

$$\left(A\,\underline{f}\right)[m,n]=\sum_{m'=0}^{N-1}\sum_{n'=0}^{N-1}A[m,n;m',n']\,f[m',n'] \,,$$

dove:

$$A[m,n;m',n']=h[m-m',n-n'] \quad .$$

Una siffatta matrice può essere scritta come convoluzione ciclica 2D, se si pone h[m – N, n –N] = h[m,n] o, se si vuole, si estende periodicamente la tabella h[k,j] con legge periodica:

$$A\,\underline{f}=\underline{h}*\underline{f} \quad .$$

Anche tali matrici sono diagonalizzate dalla base di Fourier, gli autovalori essendo dati da H[k,j].

4 – Spazi lineari di funzioni

Si considerino funzioni di n variabili, definite su un dominio $\mathcal{D}$ di $\mathcal{R}^n$. Si indicherà con $\underline{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ un punto di $\mathcal{R}^n$ e con f($\underline{x}$) il valore della funzione f nel punto $\underline{x}$.

Si consideri l'insieme di tutte le funzioni continue e limitate su un insieme aperto $\mathcal{D}$, e lo si indichi con C($\mathcal{D}$). Esso ha la struttura di uno spazio lineare dato che una combinazione lineare di funzioni limitate e continue è ancora una funzione continua. L'elemento nullo è la funzione identicamente nulla ecc. Si considerano, in generale, funzioni a valori complessi.

Se l'insieme $\mathcal{D}$ è limitato, si può introdurre in C($\mathcal{D}$) il seguente prodotto scalare:

$$(f,h)=\int_D f(\underline{x})\,h(\underline{x})^{*}\,d\underline{x} \quad .$$

Si verifica facilmente che esso soddisfa a tutte le buone proprietà del prodotto scalare. Si può dunque definire la norma di una funzione:

$$\| f \| = \left(\int_D | f(\underline{x})|^2 \, d\,\underline{x} \right)^{\frac{1}{2}} \quad ,$$

nonchè la distanza tra due funzioni:

$$\| f - h \| = \left(\int_D | f(\underline{x}) - h(\underline{x})|^2 \, d\,\underline{x} \right)^{\frac{1}{2}} \quad .$$

Vale inoltre la diseguaglianza di Schwarz:

$$\left| \int_D f(\underline{x}) h(\underline{x})^* \, d\,\underline{x} \right| \le \left(\int_D | f(\underline{x})|^2 \, d\,\underline{x} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_D |h(\underline{x})|^2 \, d\,\underline{x} \right)^{\frac{1}{2}} ,$$

dato che essa segue semplicemente dalle proprietà generali del prodotto scalare.

Due funzioni f, h si dicono *ortogonali* se il loro prodotto scalare è nullo:

$$\int_D f(\underline{x}) h(\underline{x})^* \, d\,\underline{x} = 0 \quad .$$

Un insieme di funzioni *ortonormali* è un insieme di funzioni a due a due ortogonali la cui norma è 1. Se si indicano con u_k tali funzioni, si ha.

$$\int_D u_k(\underline{x}) u_j(\underline{x})^* \, d\,\underline{x} = \delta_{k,j} \quad .$$

Esempio – Si considerino funzioni a quadrato integrabile sull'intervallo (-T/2,T/2). Come è noto sono rappresentabili mediante serie di Fourier. Le funzioni:

$$u_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i\frac{2\pi}{T}k\,t} \quad , \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

formano un insieme di funzioni ortonormali rispetto al prodotto scalare:

$$(f, h) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) h(t)^* \, dt \quad .$$

L'esempio precedente delle serie di Fourier fa capire che si può porre il problema seguente: dato uno spazio lineare di funzioni a quadrato integrabile, esiste in tale spazio un insieme numerabile di funzioni ortonormali tale che ogni funzione dello spazio sia sviluppabile in serie di tali funzioni? La risposta è affermativa e gli insiemi che godono di tali proprietà vengono detti *basi ortonormali*, come nel caso a dimensione finita.

Se le funzioni della base sono indicizzate con un indice che assume i valori 1, 2, 3, ..., si dicono *componenti* di una generica funzione f rispetto alla base delle funzioni u_k i prodotti scalari:

$$f_k = \int_D f(\underline{x}) u_k(\underline{x})^* \, d\,\underline{x} \;;$$

vale allora il seguente sviluppo in serie:

$$f(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \, u_k(t) \quad .$$

La convergenza della serie precedente deve essere intesa nel senso della convergenza in norma. Si dimostra cioè che:

$$\lim_{K \to \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^{K} f_k u_k \right\|^2 = 0 = \int_D \left| f(\underline{x}) - \sum_{k=1}^{K} f_k u_k(\underline{x}) \right|^2 d\,\underline{x} \quad .$$

Dall'ortonormalità delle funzioni della base si ha inoltre:

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{K} f_k u_k \right\|^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{K} | f_k |^2 \quad .$$

Pertanto dal risultato di convergenza segue anche la seguente *eguaglianza di Parseval*:

$$\| f \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | f_k |^2 \quad ,$$

che può essere vista come l'estensione del Teorema di Pitagora a spazi di dimensione non finita.

5 - Operatori lineari in spazi di funzioni

Anche il concetto di **operatore** in uno spazio di funzioni è una generalizzazione del concetto di funzione. Un operatore è infatti una qualunque operazione che asocia ad ogni funzione f dello spazio un'altra funzione dello stesso spazio. Come nel caso di spazi a dimensione finita si userà la notazione.

$$g = A(f) \ .$$

Di nuovo, per operatore lineare si intende un operatore che soddisfa alla condizione seguente:

$$A\left(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2\right) = \lambda_1 A\left(f_1\right) + \lambda_2 A\left(f_2\right) \ .$$

Nel caso di operatori lineari si usa la notazione semplificata:

$$g = Af \ .$$

Esempi di operatori lineari sono forniti dagli **operatori differenziali**. Ad es., nel caso di funzioni di una variabile, l'operatore cheassocia ad ogni funzione derivabile, contenuta nello spazio, la sua derivata prima:

$$(Af)(x) = f'(x) \ .$$

Ovviamente si possono definire operatori differenziali di ordine superiore, cosi' come si possono definire operatori alle derivate parziali nel caso di funzioni di più variabili.

Un altro esempio importante è fornito dagli **operatori integrali**:

$$(Af)(\underline{x}) = \int_D H(\underline{x}, \underline{x}')\, f(\underline{x}')\, d\underline{x}' \ ;$$

la funzione H dicesi il nucleo integrale dell'operatore. Un caso particolare sono gli operatori di convoluzione:

$$(Af)(\underline{x}) = \int H(\underline{x} - \underline{x}')\, f(\underline{x}')\, d\underline{x}' \ .$$