1 – Modelli di formazione di immagini

M. Bertero – DISI – Università di Genova

- Blurring
- Noise
- Problemi di ricostruzione di immagini

Un sistema di formazione di immagini (camera digitale, telecamera, microscopio, telescopio) può non fornire un'immagine fedele dell'oggetto che si vuol rappresentare o studiare. Si hanno solitamente due tipi di perturbazione che vengono indicate con i termini blurring e noise. I problemi di ricostruzione di immagini si propongono di rimuovere, almeno parzialmente, gli efetti negativi di tali perturbazioni.

1.1 - Blurring

Un sistema di formazione di immagini (camera digitale, telecamera, microscopio, telescopio ecc.) è un sistema fisico di trasmissione di segnali. In questo caso il segnale può essere una funzione di due variabili spaziali (immagini 2D) o di tre variabili spaziali (immagini 3D). Il caso delle immagini 3D si presenta generalmente in microscopia o in tomografia (si veda il corso di Immagini Biomediche).

In svariate circostanze, il sistema di formazione di immagini può essere modellizzato come un sistema lineare e continuo. In tal caso, se si indica con $\underline{x}$ il vettore delle coordinate spaziali da cui dipendono le immagini (a due o tre componenti rispettivamente nei casi 2D e 3D), e se $f(\underline{x})$ è il segnale di ingresso del sistema (nel seguito chiamato oggetto) e $g(\underline{x})$ il segnale d'uscita (in seguito chiamato immagine), allora la relazione tra oggetto ed immagine è data da:

$$g(\underline{x}) = \int H(\underline{x}, \underline{x}') f(\underline{x}')\, d\underline{x}' \ , \qquad (1.1)$$

dove $K(\underline{x},\underline{x}')$ è la risposta in impulso del sistema.

Una sorgente luminosa puntiforme localizzata nel punto $\underline{x}_0$ viene solitamente modellizzata mediante una distribuzione δ di Dirac concentrata in $\underline{x}_0$; se tale sorgente ha intensità (integrale) eguale a 1, allora:

$$f\left(\underline{x}\right)=\delta\left(\underline{x}-\underline{x}_0\right) \quad ,$$

e la sua immagine è data da:

$$g\left(\underline{x}\right)=H\left(x,x_0\right) \quad .$$

Pertanto la risposta in impulso fornisce l'immagine di sorgenti puntiformi di intensità 1. Tali immagini non sono puntiformi ma piuttosto simili a piccole macchie. Per tale motivo, nel caso di sistemi di formazione di immagini la risposta in impulso viene detta point spread function (PSF), ossia ''funzione di allargamento del punto''. L'effetto della PSF sull'oggetto f, come descritto dall'equazione (1.1), viene detto blurring (annebbiamento) in quanto l'immagine g è una versione dell'oggetto f in cui i dettagli sono meno nitidi. L'espressione sfocamento, che viene talvolta usata, non è del tutto corretta perchè, come vedremo, lo sfocamento è un caso particolare di blurring.

Svariati sistemi di formazione di immagini godono della proprietà (a volte approssimata, ma comunque molto utile) che la forma dell'immagine di un punto luminoso non dipende dalla posizione del punto. Tali sistemi, che sono anche detti *isoplanatici*, sono evidentemente sistemi invarianti per traslazioni. In tale caso si ha:

$$H\left(\underline{x}, \underline{x}_0\right) = K\left(\underline{x} - \underline{x}_0\right) \ ,$$

ed il nome *point spread function* viene attribuito alla funzione K(x); essa è l'immagine di una sorgente puntiforme di intensità unitaria, posta al centro del campo dell'immagine. La (1.1) diventa:

$$g\left(\underline{x}\right) = \int K\left(\underline{x} - \underline{x}'\right) f\left(\underline{x}'\right) d\,\underline{x}' \quad . \qquad (1.2)$$

La trasformata di Fourier della PSF viene detta *funzione di trasferimento*. Dal teorema di convoluzione e dalla (1.1) si ottiene:

$$\hat{g}\left(\underline{\omega}\right) = \hat{K}\left(\underline{\omega}\right) \hat{f}\left(\underline{\omega}\right) \quad . \qquad (1.3)$$

Tale equazione mostra che la risposta a un segnale sinusoidale è ancora un segnale sinusoidale ma con ampiezza e fase modificate.

La descrizione di un sistema di formazione di immagini mediante la sua PSF viene anche detta d e s c r i z i o n e n e l d o m i n i o s p a z i o, mentre la sua descrizione mediante la funzione di trasferimento viene detta d e s c r i z i o n e n e l d o m i n i o f r e q u e n z e.

Molte volte è utile considerare il sistema nel dominio frequenze. Ad esempio, se la PSF è a banda limitata, ossia se la funzione di trasferimento è nulla al di fuori di un dominio D_ω, allora dalla (1.3) risulta che tutte le immagini fornite dal sistema sono a banda limitata ed hanno la stessa banda della PSF (una proprietà che verrà modificata dal fenomeno che sarà considerato nel prossimo paragrafo). In tal caso si dice che i l s i s t e m a è a b a n d a l i m i t a t a. Nel caso 2D, per molti sistemi ottici, la banda è un disco con un certo raggio Ω.

E’ importante sapere se un sistema è a banda limitata e qual’è la sua banda. Infatti, grazie ai teoremi di campionamento, questa informazione permette di stabilire qual’è il campionamento piu’ opportuno per le immagini e, di conseguenza, permette di stabilire le caratteristiche del rivelatore. Inoltre, il modello continuo, precedentemente formulato, viene cosi’ trasformato in un modello discreto.

Nel seguito supporremo che la PSF soddisfi le seguenti condizioni:

$$i) \qquad K(\underline{x}) \geq 0 \qquad ;$$

$$ii) \qquad \int K(\underline{x})\, d\,x = 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{K}(0) = 1 \quad .$$

Le due condizioni implicano che la PSF è integrabile e quindi, grazie al Teorema di Riemann-Lebesgue, la funzione di trasferimento non solo è limitata e continua ma tende a zero per grandi frequenze:

$$\left|\hat{K}(\omega)\right| \rightarrow 0 \quad , \qquad |\omega| \rightarrow \infty \quad .$$

Ne segue che un sistema di formazione di immagini è un filtro di Fourier passa basso (le alte frequenze vengono soppresse). Inoltre la ii) implica che:

$$\int g(\underline{x})\, d\underline{x} = \int f(\underline{x})\, d\underline{x} \quad ,$$

come si può verificare facilmente integrando ambo i membri della (1.2). Si ha quindi conservazione dell'intensità o, come si dice in certe applicazioni, conservazione del flusso.

E s e m p i o 1 – Come primo esempio di blurring consideriamo il caso delle i m m a g i n i m o s s e. Un oggetto in movimento è stato ripreso da una telecamera fissa. Pertanto nel singolo frame, durante il tempo di esposizione, si sovrappongono piu' immagini dello stesso oggetto.

E' ovvio che stiamo considerando immagini 2D e quindi $\underline{x}=[x_1,x_2]$. Inoltre, per semplicità, supponiamo che: a) in assenza di moto, il sistema fornisce un'immagine fedele dell'oggetto, cioè $g(\underline{x})=f(\underline{x})$; b) l'oggetto si muove su fondo uniforme (il cui valore può essere posto eguale a zero) in direzione parallela all'asse delle ascisse; c) l'oggetto è tutto contenuto nel campo di vista del sistema e non esce da tale campo durante il moto.

Sia $f(x_1,x_2)$ l'immagine dell'oggetto al tempo t=0; inoltre, sia T il tempo di esposizione del frame e c è la velocità di spostamento dell'oggetto. Allora, al tempo t, l'immagine dell'oggetto è: $f(x_1 - c\,t, x_2)$. L'immagine registrata dalla telecamera alla fine del tempo di esposizione T sarà la sovrapposizione di tutte le immagini registrate ai tempi compresi tra 0 e T e quindi:

$$g(x_1,x_2)=\frac{1}{T}\int_0^T f(x_1-ct,x_2)\,dt \quad .$$

Se si effettuano i seguenti cambiamenti di variabile:

$$s = ct \quad , \quad S = cT \quad , \quad x_1' = x_1 - s \quad ,$$

si ottiene:

$$g(x_1, x_2) = \frac{1}{S}\int_0^S f(x_1 - s, x_2)\, ds = \frac{1}{S}\int_{x_1 - S}^{x_1} f(x_1', x_2)\, dx_1' =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} H(x_1 - x_1') f(x_1', x_2)\, dx_1' \quad ,$$

dove:

$$H(x_1) = \begin{cases} \dfrac{1}{S} & , \quad 0 \le x_1 \le S \;\; ; \\ 0 & , \quad \text{altrimenti} \, . \end{cases}$$

Pertanto la PSF 2D è data da:

$$K(x_1, x_2) = H(x_1)\,\delta(x_2) \quad .$$

Da risultati già noti sulla trasformata di Fourier della funzionea a gradino segue che la funzione di trasferimento del sistema è data da:

$$\hat{K}(\omega_1, \omega_2) = e^{-i\frac{S\omega_1}{2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{S\omega_1}{2}\right) \quad .$$

Tale funzione di trasferimento presenta delle linee di zeri (linee nodali) parallele all'asse delle ordinate. Le intersezioni di tali linee con l'asse delle ascisse sono date da:

$$\omega_{1,n} = \frac{2\pi}{S} n \quad ; \quad n = \pm 1, \pm 2, ...$$

Pertanto la distanza tra i due zeri centrali è $4\pi/S$, mentre la distanza tra gli altri zeri adiacenti è $2\pi/S$. Tale proprietà puo essere utilizzata per determinare S nel caso in cui tale parametro (la distanza percorsa dall'oggetto durante il tempo di esposizione) non sia noto. Infatti, grazie alla (1.3), anche la trasformata di Fourier dell'immagine presenta gli stessi zeri (a parte la perturbazione dovuta al noise) e quindi la determinazione della loro distanza permette la determinazione di S.

Esempio 2 – Il secondo esempio è quello delle immagini sfocate. Come è ben noto, l’immagine di un oggetto piano fornita da una lente sottile (che, in prima approssimazione, è un modello accettabile per una telecamera o una camera digitale) è perfettamente a fuoco se la distanza del piano oggetto dal piano della lente soddisfa alla legge delle lenti sottili:

$$\frac{1}{D_O}+\frac{1}{D_I}=\frac{1}{D_F} \quad ,$$

dove D_O, D_I e D_F sono le distanze, dal piano della lente, rispettivamente del piano oggetto, del piano immagine e del piano focale. Se questa relazione è soddisfatta allora, nell’approssimazione dell’ottica geometrica, l’immagine di un punto è un punto e quindi l’immagine fornita dalla lente è una replica fedele dell’oggetto.

D’altra parte, se il piano del’oggetto non è a fuoco, allora, sempre secondo l’ottica geometrica, l’immagine di un punto è un disco (COC = circle of confusion) con un raggio R che dipende dalla distanza dell’oggetto dal piano della lente. L’intensità del disco è proporzionale all’intensità del punto di cui è immagine.

Se l’oggetto è piano ed il piano dell’oggetto è parallelo al piano della lente, allora le immagini dei diversi punti sono dischi tutti dello stesso raggio anche se con diversa intensità. In altri termini il sistema è isoplanatico. Non si ha isoplanatismo nel caso di un oggetto 3D con punti che si trovano a distanze molto diverse dal piano della lente. Pertanto, nel caso di un oggetto piano, se si pone:

$$K(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi R^2} & , \quad |\underline{x}| \le R \\ 0 & , \quad |\underline{x}| \ge R \end{cases} \quad ,$$

allora l’immagine sfocata di un oggetto f(x) è data dall’equazione (1.2). La funzione di trasferimento del sistema è data da (si veda MESI 1):

$$\hat{K}(\underline{\omega}) = 2\,\frac{J_1(R|\underline{\omega}|)}{R|\underline{\omega}|} \quad ,$$

e quindi presenta delle linee nodali che son cerchi con centro l’origine. Anche in questo caso, le linee nodali possono essere usate per determinare il valore di R qualora non sia noto.

Esempio 3 – Nel caso di microscopi o telescopi il blurring delle immagini è dovuto agli effetti di diffrazione. Nel caso piu' semplice di una pupilla circolare e di luce coerente, la banda è un disco di raggio Ω e la funzione di trasferimento è data da:

$$\hat{K}(\underline{\omega}) = \begin{cases} 1 & , \quad |\underline{\omega}| \leq \Omega \\ 0 & , \quad |\underline{\omega}| \geq \Omega \end{cases} ,$$

con la corrispondente PSF:

$$K(\underline{x}) = \frac{\Omega}{2\pi} \frac{J_1(\Omega|\underline{x}|)}{|\underline{x}|} .$$

Nel caso di luce incoerente la PSF è proporzionale al quadrato di quella del caso coerente. Tenendo conto della normalizzazione ad integrale 1, si ottiene:

$$K(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi^3} \frac{J_1^2(\Omega|\underline{x}|)}{|\underline{x}|^2} .$$

Esempio 4 – Nel caso di grandi telescopi a terra il blurring dovuto alla turbolenza atmosferica risulta dominante rispetto al blurring di diffrazione. Tale *blurring atmosferico* è quello che non permette ai telescopi a terra di raggiungere la stessa risoluzione dei telescopi spaziali. In anni recenti tale difficoltà è stata parzialmente superata mediante l'uso di una nuova tecnologia che va sotto il nome di *ottica adattiva*.

La turbolenza atmosferica presenta fluttuazioni con tempi caratteristici dell'ordine di qualche millisecondo. Se i tempi di esposizione sono molto superiori a questi tempi caratteristici (ad es. qualche secondo), allora il blurring dovuto all'atmosfera ha un andamento quasi Gaussiano. Piu' esattamente la funzione di trasferimento è data da:

$$\hat{K}(\underline{\omega}) = \exp\left[-3.44\left(\frac{|\underline{\omega}|}{\Omega_0}\right)^{\frac{5}{3}}\right] \qquad ,$$

dove Ω_0 è un parametro che dipende solo dallo stato dell'atmosfera ed è molto piu' piccolo della banda del telescopio. Ne segue che anche un grande telescopio ha la risoluzione di uno specchio di pochi decimetri di diametro.

1.2 - Noise

Nel modello continuo precedentemente introdotto, g(x) è la distribuzione spaziale, nel piano immagine, della grandezza fisica (qualunque sia il suo significato) che rappresenta l'immagine dell'oggetto incognito f(<u>x</u>). Tale grandezza fisica è sostanzialmente un segnale analogico che deve essere convertito in un segnale digitale per ogni successiva elaborazione. Tale conversione viene solitamente effettuata mediante una CCD camera (CCD = coupled charged device) che è sostanzialmente un array di sensori. Ogni sensore fornisce una misura locale del valore dell'immagine g(<u>x</u>).

Un primo effetto del sistema di sensori è la trasformazione dell'immagine continua in un'immagine discreta (immagine digitale). Pertanto è opportuno sostituire il modello continuo, precedentemente introdotto, mediante il corrispondente modello discreto. Ciò implica la discretizzazione del prodotto di convoluzione introdotta in MESI 1.

Il secondo effetto è che ogni sensore non fornisce un valore esatto di g, che indicheremo con g_0, ma un suo valore approssimato dovuto all'effetto del noise. Tuttavia, prima di fornire una descrizione del noise, è opportuno introdurre la discretizzazione del problema.

Supponiamo che il campo di vista del rivelatore sia un quadrato che viene suddiviso in N x N pixel quadrati; tali pixel sono caratterizzati dalla coppia di indici $\underline{n} = [n_1, n_2]$, entrambi con valori da 0 a N-1. Si indichi con $\underline{g}(\underline{n})$ il valore esatto di g nel pixel $\underline{n}$ (od eventualmente il suo integrale sul dominio del pixel). Analogamente si supponga che il dominio dell'oggetto sia suddiviso in N x N pixel quadrati e che $\underline{f}(\underline{n})$ sia il valore esatto dell'oggetto nel pixel $\underline{n}$. Allora, trascurando gli effetti di bordo, la versione discreta dell'equazione (1.2) è data da:

$$\overline{g}(\underline{n}) = \sum_{\underline{n}} K(\underline{n} - \underline{n}')\overline{f}(\underline{n}') \quad , \qquad (1.4)$$

dove K($\underline{n}$) è l'array ottenuta mediante shift e prolungamento periodico dal campionamento della PSF continua (si veda MESI 1). La (1.4) va intesa come una forma abbreviata della seguente sommatoria doppia:

$$\overline{g}(n_1, n_2) = \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N} K(n_1 - n_1', n_2 - n_2')\overline{f}(n_1', n_2') \ .$$

Il valore dell’immagine nel pixel $\underline{n}$ fornito dal rivelatore non coincide con $\underline{g}(\underline{n})$ a causa di svariati fenomeni che vanno sotto il nome di noise. Tali fenomeni hanno carattere aleatorio. Pertanto, il valore misurato $g(\underline{n})$ è la realizzazione di una variabile aleatoria $\eta(\underline{n})$ il cui valore atteso è dato dall’equazione (1.4):

$$E\left\{\eta\left(\underline{n}\right)\right\} = \overline{g}\left(\underline{n}\right) \quad . \qquad (1.5)$$

Nel caso di un rivelatore basato su una array di CCD si hanno prevalentemente due tipi di noise: il noise di lettura (read out noise = RON) dovuto al sistema elettronico che amplifica il segnale in uscita da un CCD; il noise fotonico dovuto alle fluttuazioni nel numero di fotoni che arrivano sul rivelatore.

Noise di lettura – Il noise di lettura è un noise addittivo; in altri termini si può scrivere:

$$g\left(\underline{n}\right) = \overline{g}\left(\underline{n}\right) + w\left(\underline{n}\right) \quad , \qquad (1.6)$$

dove $w(\underline{n})$ è la realizzazione di una variabile aleatoria ζ che non dipende nè dal segnale $\underline{g}(\underline{n})$ nè dal pixel $\underline{n}$.

In genere il modello più accreditato per il noise di lettura è quello del noise Gaussiano bianco; ζ è allora una variabile aleatoria Gaussiana con media zero e varianza σ :

$$P_{\varsigma}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{w^2}{2\sigma^2}} \quad , \qquad (1.7)$$

Noise fotonico – Se si trascura il noise di lettura, il valore misurato dell'immagine è dato dal numero di fotoni che, durante il tempo di esposizione, sono arrivati sul CCD e sono stati rivelati. Pertanto g($\underline{n}$) è un numero intero ed è la realizzazione di una variabile aleatoria Poissoniana con valore atteso dato dalla (1.5):

$$P_{\eta(\underline{n})}\left(g(\underline{n})\right) = \frac{e^{-\overline{g}(\underline{n})}\,\overline{g}(\underline{n})^{g(\underline{n})}}{g(\underline{n})!} \quad . \qquad (1.8)$$

Anche in questo caso si può pensare di scrivere g($\underline{n}$) nella forma (1.6). Si deve però osservare che w($\underline{n}$) non è più indipendente dal segnale come nel caso del noise di lettura.

1.3 - Problemi di ricostruzione di immagini

L’immagine g di un oggetto f fornita dal sistema ’’strumento ottico + rivelatore’’ può essere gravemente deteriorata sia dal blurring che dal noise.

Si pone quindi il problema di tentare di migliorare l’immagine registrata mediante un’opportuna elaborazione di g. Combinando la (1.4) con la (1.6) si vede che il modello di formazione-registrazione di immagine è dato da:

$$g = K * \overline{f} + w \quad , \qquad (1.9)$$

dove f_ è l’oggetto incognito. Pertanto si vede che, se si considera questa come un’equazione avente come incognita l’oggetto f_, risulta indispensabile conoscere la PSF K del sistema di formazione di immagini. D’altra parte non è pensabile conoscere il termine di noise w, dato che questo è la realizzazione di un processo aleatorio.

Pertanto un problema di ricostruzione di immagini è il problema di determinare una stima f di un oggetto incognito f_ essendo data la sua immagine e la PSF dello strumento utilizzato.

Nel seguito si indicherà con A la matrice circolante a blocchi definita dal prodotto di convoluzione con la PSF K; si porrà quindi:

$$Af = K * f \quad .$$

Dal punto di vista computazionale, i metodi di ricostruzione di immagine richiedono sovente il calcolo di un prodotto matrice-vettore, nel caso di una matrice circolante. Il calcolo si effettua mediante la FFT, poichè, solitamente, le immagini hanno dimensioni che sono potenze di due. Diamo alcuni esempi, ricordando che ad ogni matrice circolante è associata una funzione di trasferimento, nel seguito indicata.

$$A \Rightarrow \hat{K} \quad , \quad Af = FFT^{-1}\left(\hat{K}\,\hat{f} \right) \quad ;$$

$$A^T \Rightarrow \hat{K}^* \quad , \quad A^T f = FFT^{-1}\left(\hat{K}^*\,\hat{f} \right) \quad ;$$

$$A^{-1} \Rightarrow \frac{1}{\hat{K}} \quad , \quad A^{-1} f = FFT^{-1}\left(\frac{\hat{f}}{\hat{K}} \right) \quad , \quad \text{se } \hat{K} \neq 0 \ \text{ ovunque}\,;$$

$$A^T A \Rightarrow |\hat{K}|^2 \quad ; \quad A^T A f = FFT^{-1}\left(|\hat{K}|^2 \; \hat{f} \right) \quad ;$$

$$A^T A + \mu I \Rightarrow |\hat{K}|^2 + \mu \quad ; \quad \left(A^T A + \mu I \right) f = FFT^{-1}\left[\left(|\hat{K}|^2 + \mu \right) \hat{f} \right] \quad .$$

Nell’ultima equazione I indica la matrice identica.

$$\left(A^T A + \mu I \right)^{-1} \Rightarrow \frac{1}{|\hat{K}|^2 + \mu} \quad ; \quad \left(A^T A + \mu I \right)^{-1} f = FFT^{-1}\left(\frac{\hat{f}}{|\hat{K}|^2 + \mu} \right) \quad .$$