Trasformata di Fourier 1D

M. Bertero – DISI – Università di Genova

- **Dalla serie all'integrale di Fourier**
- **Formula di inversione della trasformata di Fourier**
- **Proprietà della trasformata di Fourier**
- **Esempi di trasformate di Fourier**
- **Prodotto di convoluzione**
- **Sistemi lineari**
- **Teorema del campionamento**
- **Discretizzazione della trasformata di Fourier**

1 – Dalla serie all'integrale di Fourier

Si consideri una funzione f(t) definita su tutta la retta e tale che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < \infty \quad ; \qquad (0)$$

in tal caso la funzione definita da:

$$\hat{f}_T(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega t} dt, \qquad (1)$$

ha limite per T tendente all'infinito qualunque sia ω, ed il limite è:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \qquad (2)$$

Tale funzione dicesi la **trasformata di Fourier** di f(t). Si pone il problema seguente: data la trasformata di Fourier di una funzione, è possibile da questa riottenere la funzione ?

La risposta alla precedente domanda è affermativa e può essere giustificata mediante il seguente argomento euristico.

Si consideri la restrizione della funzione f(t) sull'intervallo (-T/2, T/2). Tale restrizione può essere rappresentata mediante serie di Fourier, dato che tale serie richiede solo la conoscenza della funzione sull'intervallo periodo. Ovviamente la serie coincide con f(t) su (-T/2, T/2) mentre al di fuori di tale intervallo ne definisce il prolungamento periodico con periodo T

Poichè i coefficienti di Fourier di f(t) sono esprimibili mediante la funzione definita in (1):

$$c_k = \frac{1}{T} \hat{f}_T\left(\frac{2\pi}{T} k\right),$$

la serie di Fourier può essere scritta nel modo seguente:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_T\left(\frac{2\pi}{T} k\right) e^{i\left(\frac{2\pi}{T} k\right) t} \left(\frac{2\pi}{T}\right). \qquad (3)$$

Il passo successivo è quello di far tendere T all'infinito.

La somma (3) può essere interpretata come una ''somma integrale'' formata mediante i valori della funzione

$$\hat{f}_T(\omega) e^{i\omega t} \qquad (4)$$

calcolati nei punti equispaziati $\omega_k = \frac{2\pi}{T} k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$

Se T cresce, la distanza tra due punti successivi diminuisce e tende a zero per T che tende all'infinito. Ciò suggerisce che la ''somma integrale'' abbia come limite l'integrale del limite della (4). Si giunge cosi' alla **formula di inversione della trasformata di Fourier**:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} dt, \qquad (5)$$

la trasformata di Fourier essendo definita nell'equazione (2).

La trasformata di Fourier e la relativa formula di inversione possono essere scritte in forma piu' simmetrica se scritte in termini di frequenza anzichè pulsazione. Infatti il segnale:

$$e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$$

è periodico con periodo T = 2 π / ω e frequenza ν = ω / 2 π. Pertanto, introducendo la variabile ν, si ottiene:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \quad , \quad \hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \quad . \qquad (6)$$

Questa forma della trasformata di Fourier e della sua inversa è usata soprattutto nei testi di ingegneria. Nel seguito si userà di norma la scrittura in termini della pulsazione ω.

La risposta alla precedente domanda è affermativa e può essere giustificata mediante il seguente argomento euristico.

Si consideri la restrizione della funzione f(t) sull'intervallo (-T/2, T/2). Tale restrizione può essere rappresentata mediante serie di Fourier, dato che tale serie richiede solo la conoscenza della funzione sull'intervallo periodo. Ovviamente la serie coincide con f(t) su (-T/2, T/2) mentre al di fuori di tale intervallo ne definisce il prolungamento periodico con periodo T

Poichè i coefficienti di Fourier di f(t) sono esprimibili mediante la funzione definita in (1):

$$c_k = \frac{1}{T} \hat{f}_T\left(\frac{2\pi}{T} k\right),$$

la serie di Fourier può essere scritta nel modo seguente:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_T\left(\frac{2\pi}{T} k\right) e^{i\left(\frac{2\pi}{T} k\right)t} \left(\frac{2\pi}{T}\right). \qquad (3)$$

Il passo successivo è quello di far tendere T all'infinito.

2 – Formula di inversione della trasformata di Fourier

A partire dalla TF di una funzione f(t), si definisca la funzione seguente:

$$f_\Omega(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\omega) e^{it\omega} d\omega \quad . \qquad (7)$$

Vale il seguente risultato:

Teorema – Se la funzione f(t) soddisfa la condizione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \qquad (8)$$

allora:

$$\lim_{\Omega\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_\Omega(t) - f(t)|^2 = 0$$

si ha cioè convergenza in media quadratica.

Per quanto rigarda la convergenza puntuale, se la funzione f(t) è a variazione limitata, allora:

$$\lim_{\Omega\to\infty} f_\Omega(t) = \frac{1}{2}\left[f(t+0) + f(t-0)\right] \quad . \qquad (9)$$

e quindi si ha convergenza al valore della funzione nei punti di continuità. Questo risultato può essere giustificato a partire dalla relazione:

$$f_\Omega(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i\omega t'} dt' \right) e^{i\omega t} d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i(t-t')\omega} d\omega \right) f(t') dt' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[\Omega(t-t')]}{\pi(t-t')} f(t') dt' =$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{\sin(\Omega u)}{\pi u} [f(t+u) + f(t-u)] du \quad .$$

Proprietà della funzione sinc

La funzione sinc(t) è definita da:

$$\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin t}{t} \quad .$$

La seguente funzione ad essa associata:

$$D_\Omega(t) = \frac{\Omega}{\pi}\operatorname{sinc}(\Omega t) = \frac{\sin(\Omega t)}{\pi t} \quad ,$$

gode di proprietà simili a quelle del nucleo di Dirichlet delle serie di Fourier:

$$i) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} D_\Omega(t)\,dt = 1 \quad ;$$

$$ii) \quad \lim_{\Omega\to\infty} \int_{\varepsilon<|t|<\eta} D_\Omega(t)\,dt = 0 \;, \qquad \text{uniformemente in } \eta \quad ;$$

$$iii) \quad \lim_{\Omega\to\infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} D_\Omega(t)\,dt = 1 \quad .$$

La proprietà i) si ottiene mediante calcolo dell'integrale nel piano complesso; la iii) segue da i) e da ii). Per quanto riguarda questa proprietà, mediante un'integrazione per parti si ha:

$$\int_\varepsilon^\eta \frac{\sin(\Omega t)}{\pi t}dt = \int_\varepsilon^\eta \frac{1}{t} d\left(-\frac{\cos(\Omega t)}{\pi\Omega}\right) = \frac{\cos(\Omega\eta)}{\pi\Omega\eta} - $$

$$- \frac{\cos(\Omega\eta)}{\pi\Omega\eta} + \frac{1}{\pi\Omega}\int_\varepsilon^\eta \frac{\cos(\Omega t)}{t^2}dt \quad ,$$

da cui:

$$\left|\int_\varepsilon^\eta \frac{\sin(\Omega t)}{\pi t}dt\right| \le \frac{2}{\pi\Omega\varepsilon} + \frac{1}{3\pi\Omega\varepsilon^3} \quad ,$$

e quindi l'integrale tende a zero per Ω che tende all'infinito, in modo uniformeme rispetto a η.

Definizione della funzione delta di Dirac

Il limite (nel senso delle distribuzioni), per Ω che tende all'infinito, della dilatata di Ω della funzione sinc è la funzione generalizzata δ(t), detta **delta di Dirac**, che gode delle seguenti proprietà:

- $\delta(t) = 0 \quad , \quad t \neq 0 \quad ;$
- $\delta(0) = +\infty \quad ;$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0) \quad , \ \text{se } f(t) \text{ è continua in } t = 0;$
- $\hat{\delta}(\omega) = 1 \quad .$

Eguaglianza di Parseval

Vale la seguente eguaglianza:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\hat{g}^*(\omega)d\omega \quad , \qquad (10)$$

e, nel caso particolare f = g:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega \quad . \qquad (11)$$

Infatti, dalla formula di inversione si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{it\omega}d\omega\right)g^*(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g^*(t)e^{it\omega}dt\right)\hat{f}(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-it\omega}dt\right)^*\hat{f}(\omega)d\omega \;.$$

3 – Proprietà della trasformata di Fourier (TF)

Teorema di Riemann-Lebesgue - Se la funzione f(t) è integrabile, soddisfa cioè alla condizione (0), allora la sua TF è limitata:

$$\left|\hat{f}\,(\omega)\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\, f(t)| dt \quad ;$$

è inoltre continua e tende a zero per |ω| che tende all'infinito.

$$\lim_{|\omega|\to\infty} \hat{f}\,(\omega) = 0.$$

Osservazione – Come per i coeficienti di Fourier, la trasformata di Fourier di una funzione va a zero tanto piu' rapidamente quanto piu' è regolare la funzione.

Proprietà di simmetria della TF

- Se f(t) è a valori reali, allora :

$$\hat{f}^*(\omega) = \hat{f}\,(-\omega). \qquad (12)$$

Infatti, se si pone:

$$\hat{f}\,(\omega) = X(\omega) - iY\,(\omega)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)dt \quad , \quad Y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)dt \quad ,$$

si ha:

$$X(\omega) = X(-\omega) \qquad , \qquad Y(\omega) = -Y(-\omega)$$

da cui segue il risultato.

- Se f(t) è pari allora anche la sua TF è pari :

$$\hat{f}\,(\omega) = \hat{f}\,(-\omega).$$

Basta infatti osservare che si ha $Y(\omega) = 0$.

- Se f(t) è reale e pari allora anche la sua TF è reale e pari :

$$\hat{f}^*(\omega) = \hat{f}\,(-\omega) = \hat{f}\,(\omega) \quad .$$

- Se f(t) è dispari allora anche la sua TF è dispari :

$$\hat{f}\,(\omega) = -\,\hat{f}\,(-\omega)$$

Basta infatti osservare che si ha $X(\omega) = 0$.

- Se f(t) è reale e dispari allora la sua TF è immaginaria e dispari :

$$\hat{f}^*(\omega) = \hat{f}\,(-\omega) = -\,\hat{f}\,(\omega) \quad .$$

Proprietà di trasformazione della TF

- Traslazione: Sia $f_a(t)$ la traslata di a di f(t):

$$f_a(t) = f\,(t-a) \quad \Rightarrow \quad \hat{f}_a(\omega) = e^{-ia\omega}\,\hat{f}\,(\omega) \quad . \qquad (13)$$

- Modulazione: Sia $f_a(t)$ la modulata di a di f(t).

$$f_a(t) = e^{iat} f\,(t) \quad \Rightarrow \quad \hat{f}_a(\omega) = \hat{f}\,(\omega - a) \quad . \qquad (14)$$

- Dilatazione: Sia $f_a(t)$ la dilatata di a di f(t):

$$f_a(t) = \frac{1}{a} f\,(\frac{t}{a}) \quad \Rightarrow \quad \hat{f}_a(\omega) = \hat{f}\,(a\omega) \quad . \qquad (15)$$

Proprietà di regolarità e di comportamento all'infinito

Sia f(t) una funzione derivabile fino all'ordine n, e con derivata n-esima integrabile; derivando n volte sotto il segno la formula di inversione, si ottiene:

$$f^{(n)}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(i\omega)^n\,\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}dt\ ,$$

da cui segue che la trasformata di Fourier di $f^{(n)}$ è data da:

$$\left(f^{(n)}\right)^{\wedge}(\omega)=(i\omega)^n\,\hat{f}(\omega)\ . \qquad (16)$$

Dal Teorema di Riemann-Lebesgue segue che tale funzione è limitata e tende a zero per ω che tende all'infinito; pertanto quanto più è regolare la funzione f(t) tanto più rapidamente tende a zero la sua trasformata di Fourier. Dalla simmetria tra trasformate di Fourier e trasformata inversa segue anche che, quanto più rapidamente tende a zero la funzione f(t), tanto più regolare è la sua trasformata di Fourier.

Se la funzione f(t) ha derivata n-esima a quadrato integrabile, dalla eguaglianza di Parseval segue che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f^{(n)}(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\omega|^{2n}|\hat{f}(\omega)|^2\,d\omega \qquad (17)$$

Analogamente, dalla relazione:

$$\left((-it)^n f\right)^{\wedge}(\omega)=\hat{f}^{(n)}(\omega)\ , \qquad (18)$$

si ottiene anche la formula seguente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|t|^{2n}|f(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}^{(n)}(\omega)|^2\,d\omega\ . \qquad (19)$$

Relazione di indeterminazione

Sia f(t) una funzione a quadrato integrabile tale che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2\,dt=1\ .$$

Pertanto $|f(t)|^2$ rappresenta una densità di probabilità e così' pure, grazie all'eguaglianza di Parseval, la funzione $(2\pi)^{-1/2}|f^\wedge(\omega)|^2$. Si possono pertanto definire i valori medi del tempo e della frequenza associati a tali distribuzioni e le relative varianze:

$$\mu_t=\int_{-\infty}^{+\infty}t\,|f(t)|^2\,dt\quad ,\quad \sigma_t^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(t-\mu_t)^2\,|f(t)|^2\,dt$$

$$\mu_\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega|\hat{f}(\omega)|^2\,d\omega\quad ,\quad \sigma_\omega^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\omega-\mu_\omega)^2\,|\hat{f}(\omega)|^2\,d\omega$$

Mediante la sostituzione:

$$f(t)\quad\rightarrow\quad e^{-i\mu_\omega t}f(t+\mu_t)\quad ,$$

si ottiengono nuova distribuzioni per le quali sia il tempo che la frequenza hanno valor medio nullo. Ciò permette di semplificare i calcoli necessari al fine di ottenere il seguente risultato.

Teorema – Vale la seguente diseguaglianza, detta *relazione di indeterminazione*:

$$\sigma_t\sigma_\omega\geq\frac{1}{2}\ .$$

Dimostrazione – Dall'equazione (17) si ottiene:

$$\sigma_t^2\sigma_\omega^2=\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\,|f(t)|^2\,dt\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\,|\hat{f}(\omega)|^2\,d\omega=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\,|f(t)|^2\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}|f'(t)|^2\,dt\ .$$

Dalla diseguaglianza di Schwarz segue allora che:

$$\sigma_t^2\sigma_\omega^2 \geq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |t\ f\ '(t) f(t)|\, dt\right)^2 \geq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Re}\left(t\ f\ '(t) f(t)\right) dt\right)^2 =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{2}\left[f\ '(t) f^*(t) + f\ '^*(t) f(t)\right] dt\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} t\left(|\ f(t)|^2\right)' dt\right)^2 \quad .$$

La seconda diseguagliaza segue dal fatto che la parte reale di un numero complesso è sempre minore del suo modulo.

Se $|t|^{1/2} f(t)$ tende a zero per t che tende all'infinito, allora, integrando per parti, si ottiene:

$$\sigma_t^2\sigma_\omega^2 \geq \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\ f(t)|^2\ dt\right)^2 = \frac{1}{4} \quad .$$

Osservazione – Nella diseguaglianza di Schwarz vale il segno eguale se e solo se la funzione f(t) soddisfa la relazione:

$$f\ '(t) = -b\, t\, f(t) \quad ,$$

dove b > 0 è una costante arbitraria. Si ottiene quindi che la diseguaglianza è saturata da una qualsiasi funzione del tipo (funzione Gaussiana):

$$f(t) = a\ e^{-b\, t^2} \quad .$$

La Gaussiana il cui quadrato ha varianza σ_t^2 è data da :

$$f(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{t^2}{4\sigma_t^2}} \quad .$$

Pertanto si deve avere:

$$\hat{f}(\omega) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\omega}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\omega^2}{4\sigma_\omega^2}} = \left(\frac{2\sigma_t}{\sqrt{2\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\sigma_t^2\omega^2} \quad ,$$

come è facile verificare (si vedano gli esempi seguenti).

3 – Esempi di Trasformate di Fourier

Esempio 1 – Si consideri la funzione definita da:

$$f(t) = \begin{cases} 1 \quad , & |t| < T \\ 0 \quad , & |t| \geq T \end{cases} \quad .$$

La sua trasformata di Fourier è data da:

$$\hat{f}(\omega) = 2\frac{\sin(T\omega)}{\omega} \quad .$$

Viceversa, dalla formula di inversione segue che la TF di:

$$f(t) = \frac{\sin(\Omega t)}{\pi t} \quad ,$$

è:

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} 1 \quad , & |\omega| < \Omega \\ 0 \quad , & |\omega| \geq \Omega \end{cases} \quad .$$

Esempio 2 – Si consideri la funzione definita da:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \quad ;$$

la sua TF è data da:

$$\hat{f}(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\omega^2} \quad .$$

Dalle proprietà di trasformazione della TF segue allora che la TF di:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-a)^2} \quad ,$$

è data da:

$$\hat{f}(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\left(\sigma^2\omega^2 + 2ia\omega\right)} \quad .$$

4 – Prodotto di convoluzione

Definizione – Il prodotto di convoluzione di due funzioni f(t), g(t) è la funzione h(t) definita da:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)g(u)\ du = (f * g)(t) \quad . \qquad (16)$$

Proposizione - Il prodotto di convoluzione è commutativo, associativo e distributivo rispetto alla somma:

$$f * g = g * f, \quad f*(g*h) = (f*g)*h, \qquad (17)$$
$$f*(g+h) = f*g + f*h \quad .$$

La prima proprietà segue da un semplice cambio di variabile, la seconda da uno scambio di ordine d'integrazione, la terza dalla linearità dell'integrale.

Vale il seguente risultato.

Teorema di convoluzione – La TF del prodotto di convoluzione di due funzioni è il prodotto delle TF due funzioni:

$$\hat{h}(\omega) = (f \hat{*} g)(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) \quad . \qquad (18)$$

Dimostrazione – Dalla definizione di trasformata di Fourier si ha:

$$\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)g(u)\ du\right) e^{-i\omega t} dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)\ e^{-i\omega(t-u)} dt\right) g(u) e^{-i\omega u} du =$$
$$= \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega t} dt \int_{-T/2}^{T/2} g(u)\ e^{-i\omega u} du \quad ,$$

che è quanto volevasi dimostrare.

Vale la seguente **proprietà di supporto:** Se f(t) ha supporto in [-a,a] e g(t) in [-b,b], allora h = f*g ha supporto in [-(a+b),a+b].

Infatti, dalla definizione si ha:

$$h(t) = \int_{-b}^{b} f(t-u)g(u)\,du \quad ,$$

e quindi h(t) = 0 se |t-u| > a per |u| < b; queste due diseguaglianze implicano |t| > a+b.

Vale inoltre la seguente **proprietà di integrabilità:** se la funzione f(t) è integrabie (soddisfa cioè la condizione (0)) mentre la funzione g(t) è a quadrato integrabile (soddisfa cioè la condizione (11), allora la funzione h(t) è anche a quadrato integrabile.

Infatti dal Teorema di Riemann-Lebesgue segue che la TF di f(t) è limitata; dal Teorema di convoluzione e dall'eguaglianza di Parseval segue allora che la TF di g(t) e dunque anche quella di h(t) sono a quadrato integrabile.

5 – Sistemi lineari

Un sistema fisico di trasmissione di segnali definisce una relazione univoca tra un segnale d'ingresso f(t), in una certa classe X ed un segnale d'uscita g(t), in una classe Y. Pertanto un **sistema** non e' altro che una **trasformazione**, od **operatore**, che applicato ad ogni segnale della clase X associa ad esso uno ed un solo segnale della classe Y. Per rappresentare un sistema si usa una notazione analoga a quella di funzione e si scrive che:

$$g = A(f) \quad .$$

Si dice che un sistema è lineare se per esso vale la proprietà:

$$A(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 A(f_1) + \lambda_2 A(f_2) \quad .$$

Per un sistema lineare si usa la notazione semplificata:

$$g = Af \quad .$$

La proprietà di linearità implica che:

$$A\left(\sum_{n=1}^{N}\lambda_n f_n\right)=\sum_{n=1}^{N}\lambda_n A(f_n) \qquad ,$$

da cui, mediante un passaggio al limite, si ottiene:

$$A\left(\int\lambda(\alpha)f_\alpha d\alpha\right)=\int\lambda(\alpha)A(f_\alpha)\,d\alpha \quad . \qquad (19)$$

Dicesi **risposta in impulso** di un sistema lineare il segnale che si ottiene in uscita quando in ingresso si ha una funzione (impulso) δ ; se si pone:

$$\delta_{t'}(t)=\delta(t-t') \quad ,$$

la risposta in impulso è data da:

$$K(t,t')=(A\delta_{t'})(t) \quad . \qquad (20)$$

Se si usa la seguente rappresentazione di un segnale generico:

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t')\delta(t-t')dt'=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{f}(t')\delta_{t'}(t)dt' \quad ,$$

dalla relazione (20) e dalla definizione (19) della risposta in impulso si ottiene la seguente rappresentazione di un sistema lineare:

$$g(t)=(Af)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}K(t,t')f(t')\,dt' \quad . \qquad (21)$$

Un sistema si dice **causale** se non c'è segnale in uscita prima che ci sia un segnale in ingresso; dalla definizione (20) segue che K(t,t') = 0 se t < t'; per un sistema causale si ha dunque:

$$g(t)=\int_{-\infty}^{t}K(t,t')f(t')dt' \quad .$$

Si definiscano le traslazioni di un segnale come nella (8); un sistema si dice **stazionario** o **tempo invariante** o anche **invariante per traslazioni**, se, dato un ingresso f(t) con uscita g(t), l'uscita del segnale traslato $f_a(t)$ è il traslato $g_a(t)$. In altri termini il sistema si comporta allo stesso modo a tempi diversi. Dalla definizione di risposta in impulso segue che, se poniamo:

$$K(t)=K(t,0)=(A\delta)(t) \quad ,$$

dalla proprietà di invarianza si ottiene:

$$K(t,t')=K(t-t') \quad ,$$

e quindi vale la rappresentazione:

$$g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}K(t-t')f(t')\,dt' \quad .$$

Se il sistema è anche causale:

$$g(t)=\int_{-\infty}^{t}K(t-t')f(t')\,dt' \quad .$$

La risposta in impulso è la funzione che caratterizza la risposta del sistema quando il segnale d'ingresso è appunto un impulso. La sua trasformata di Fourier, detta **funzione di trasferimento**, caratterizza la risposta del sistema ad un generico segnale armonico, cioè un segnale con frequenza fissa. Se:

$$f(t)=Fe^{i\omega t} \quad ,$$

dove l'ampiezza F è in generale un numero complesso, allora:

$$g(t)=(Af)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}K(t-t')Fe^{i\omega t'}dt'=\hat{K}(\omega)Fe^{i\omega t} \quad .$$

Pertanto, se il segnale di ingresso ha ampiezza F, il segnale in uscita è ancora un segnale armonico con la stessa frequenza ma con ampiezza G data da:

$$G=\hat{K}(\omega)F \quad .$$

Ne segue che il sistema modifica sia il modulo che la fase dell'ampiezza.

Nel caso di un sistema causale la risposta in impulso è nulla per t<0 e quindi la funzione di trasferimento è data da:

$$\hat{K}(\omega)=\int_0^{+\infty} K(t)\,e^{-i\omega t}dt \quad .$$

Si dimostra che una tale funzione ha solo zeri isolati, in quanto funzione di ω. Questo risultato implica che, nel caso di un sistema stazionario e causale, il **segnale di ingresso è univocamente determinato dal segnale in uscita**. Infatti, si supponga che due segnali $f_1(t)$ e $f_2(t)$ diano lo stesso segnale in uscita g(t). Ma allora, per la linearità del sistema, il segnale in uscita corrispondente a $f(t) = f_1(t) - f_2(t)$ è nullo. Dal teorema di convoluzione segue allora che:

$$0=\hat{K}(\omega)\,\hat{f}(\omega) \quad .$$

Ma poichè la funzione di trasferimento è diversa da zero quasi ovunque, ne segue che la trasformata di Fourier di f(t) è zero quasi ovunque, dunque f(t) è nullo ed i due segnali di partenza sono coincidenti.

6 – Teorema del campionamento

Nelle applicazioni i segnali continui devono essere campionati e quindi trasformati in segnali discreti. Ci si può dunque porre il problema seguente: è possibile riottenere il segnale continuo a partire dal segnale discreto? Ovviamente, in generale, la risposta è no. Tuttavia essa può essere positiva sotto particolari crcostanze. In questo ambito si colloca il famoso **Teorema del campionamento** di Shannon, o di Whittaker-Shannon. Occore prima introdurre alcune definizioni.

Definizione 1 – Una funzione f(t) dicesi a banda limitata, con banda Ω, se la sua trasformata di Fourier è nulla al di fuori dell'intervallo $[-\Omega,\Omega]$:

$$\hat{f}(\omega)=0 \qquad , \qquad |\omega|>\Omega \ .$$

Definizione 2 – Una funzione f(t) dicesi tempo limitata se è nulla al di fuori dell'intervallo [-T,T]:

$$f(t)=0 \quad , \quad |t|>T \quad .$$

Osservazione – Una funzione non può essere sia a banda limitata che tempo limitata. Supponiamo infatti che f(t) sia a banda limitata con banda Ω e che sia nulla al di fuori di un intervallo limitato (a,b) che non contiene l'origine. Dallo sviluppo in serie di Taylor dell'esponenziale:

$$e^{i\omega t}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(i\omega t)^n}{n!} \qquad ,$$

sostituendo nella formula di inversione della trasformata di Fourier ed integrando termine a termine, si ottiene che per ogni t si ha:

$$f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{+\Omega}(i\omega)^n\,\hat{f}(\omega)\,d\omega\right)t^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}t^n \quad ,$$

dove si è tenuto conto della rappresentazione (16) per le derivate di f(t). Poichè tutte le derivate sono nulle in 0 e poichè la serie converge per ogni t, ne segue che f(t) deve essere nulla ovunque. Questo risultato esclude la possibilità di costruire un filtro a banda limitata che sia anche tempo limitato, con l'unica restrizione del principio di indeterminazione. Un tale filtro potrebbe essere molto utile nelle applicazioni pratiche.

Teorema del campionamento 1 – Sia f(t) una funzione a banda limitata, con banda Ω, allora essa puo' essere rappresentata mediante la serie seguente:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t_n)\,\mathrm{sinc}\left[\Omega(t-t_n)\right] \qquad ,$$

dove sinc(t) è la funzione definita a pag. 8 ed i punti t_n sono dati da:

$$t_n=\frac{\pi}{\Omega}n \quad , \quad n=0,\pm1,\pm2,......$$

Osservazione – La quantità π/Ω viene detta **distanza di campionamento di Nyquist**; essa rappresenta la distanza di campionamento ottimale. Se si usa una distanza di campionamento più piccola il segnale si dice **sovracampionato**, mentre se si usa una distanza di campionamento più grande, il segnale si dice **sottocampionato**. Mentre è possibile ricostruire accuratamente un segnale sovracampionato, ciò non è possibile nel caso di un segnale sottocampionato.

Dimostrazione – Si sviluppi in serie di Fourier la trasformata di Fourier di f(t) sull'intervallo $[-\Omega,\Omega]$:

$$\hat{f}(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{-i2\pi n\frac{\omega}{2\Omega}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{-i\pi n\frac{\omega}{\Omega}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{-i t_n \omega}$$

(si osservi che si è cambiato n in –n rispetto alla definizione usuale); dalla definizione di coefficienti di Fourier e dalla formula di inversione della trasformata di Fourier segue che:

$$c_n=\frac{1}{2\Omega}\int_{-\Omega}^{+\Omega}\hat{f}(\omega)e^{i t_n\omega}d\omega=\frac{\pi}{\Omega}f(t_n) \quad .$$

Sostituendo nell'equazione precedente, dalla formula di inversione segue:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\pi}{\Omega}f(t_n)\int_{-\Omega}^{+\Omega}e^{i(t-t_n)\omega}d\omega=\frac{1}{2\Omega}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(t_n)2\frac{\sin[\Omega(t-t_n)]}{t-t_n} \; ,$$

da cui il Teorema.

Osservazione – Se si introducono le funzioni di campionamento:

$$S_{\Omega,n}(t)=\mathrm{sinc}[\Omega(t-t_n)] \; , \; \mathrm{n}=0,\pm1,\pm2,......$$

dall'eguaglianza di Parseval per l'integrale di Fourier e dall'ortogonalità degli esponenziali delle serie di Fourier segue che esse godono della seguente proprietà di ortogonalità:

$$\int_{-\Omega}^{+\Omega}S_{\Omega,m}(t)\,S_{\Omega,n}(t)dt=\frac{\pi}{\Omega}\delta_{m,n} \quad .$$

Queste implicano le seguenti relazioni:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\,f(t)|^2\,dt=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\,f(t_n)|^2\,\frac{\pi}{\Omega} \quad ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,h^*(t)dt=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(t_n)\,h^*(t_n)\frac{\pi}{\Omega} \quad .$$

La simmetria tra la trasformata di Fourier e la sua trasformata inversa permette di ottenere in modo del tutto analogo il seguente risultato.

Teorema del campionamento 2 – Sia f(t) una funzione tempo limitata, nulla al di fuori di [-T,T]; allora la sua trasformata di Fourier puo' essere rappresentata mediante la serie seguente:

$$\hat{f}(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(\omega_n)\,\mathrm{sinc}\,[T(\omega-\omega_n)] \quad ,$$

dove sinc(ω) è la funzione definita a pag. 8 ed i punti ω_n sono dati da:

$$\omega_n=\frac{\pi}{T}n \quad , \quad n=0,\pm1,\pm2,......$$

Osservazione – La quantità π/T è detta **distanza di campionamento di Nyquist** per la trasformata di Fourier di una funzione tempo limitata; essa rappresenta la distanza di campionamento ottimale.

7 - Discretizzazione della Trasformata di Fourier

Sia f(t) una funzione nulla al di fuori dell'intervallo [-T,T]; pertanto la sua trasformata di Fourier è data da:

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-T}^{+T}f(t)\,e^{-i\omega t}dt \quad .$$

Per il calcolo approssimato dell'integrale si può usare una semplice formula di quadratura suddividendo l'intervallo [-T,T] in N sotto-intervalli mediante i punti:

$$t_n=-T+n\delta_t \quad , \quad \delta_t=\frac{2T}{N} \quad ; \quad \mathrm{n}=0,1,.....,\mathrm{N}\text{-}1.$$

Si considera allora la seguente approssimazione:

$$\hat{f}_N(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}f(t_n)\,\delta_t\,e^{-i\omega t_n} \quad .$$

Si supponga di voler calcolare la precedente approssimazione in N punti di un intervallo $[-\Omega,\Omega]$ e, più precisamente, nei punti:

$$\omega_m = -\Omega + m\delta_\omega \quad , \quad \delta_\omega = \frac{2\Omega}{\mathrm{N}} \quad ; \quad \mathrm{m} = 0,1,\ldots,\mathrm{N}-1 \; .$$

Si vuol stabilire sotto quali condizioni si può ridurre il calcolo a quello di una DFT, aprendo cosi' la possibilità di ricorrere all'algoritmo veloce FFT. Dalla relazione:

$$\omega_m t_n = (-\Omega + m\delta_\omega)(-T + n\delta_t) = \Omega T + (m\delta_\omega + n\delta_t) + mn\,\delta_\omega\delta_t$$

risulta che si ottiene il tipico esponente della DFT se:

$$\delta_\omega\delta_t = \frac{2\pi}{N} \quad ,$$

cioè se:

$$\frac{\Omega T}{N} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \delta_t = \frac{\pi}{\Omega} \quad , \quad \delta_\omega = \frac{\pi}{T} \quad .$$

Si osservi la relazione con le distanze di campionamento di Nyquist-

Il precedente risultato implica che, per poter usare la FFT, si deve tener conto della relazione tra le tre gandezze T, Ω e N. Se si può operare in modo da soddisfare a tale relazione (modificando, ad es., Ω oppure N), si ottiene:

$$\omega_m t_n = \frac{\pi}{2} N - \pi(m+n) + \frac{2\pi}{N} mn \quad .$$

Se N è una potenza di due, il primo fattore non contribuisce all'esponenziale e si ha quindi:

$$\hat{f}_N(\omega_m) = (-1)^m \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n f(t_n)\, e^{-i\frac{2\pi}{N}mn} \quad .$$

Si possono quindi fare le seguenti operazioni: 1) – definire il vettore $f_n = f(t_n)\delta_t$ e la corispondente successione periodica; 2) – effettuare una traslazione di N/2; 3) – calcolare la FFT; 4) – effettuare una traslazione di N/2 sul risultato ottenuto. Si ricordi che una traslazione di N/2 è equivalente ad un ribaltamento del vettore. Le operazioni di ribaltamento permettono di evitare il calcolo delle potenze di -1.